Beitrag zur Berechnung geschlossener Rahmen mit durchgehender Fundamentplatte.

Von der

Technischen Hochschule zu Breslau

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

Vorgelegt von

Dipl.- Ing. Max S t r a u b

aus Köln a. Rh.

Referent:

Professor Dr. Ing. L. Mann

Korreferent:

Professor Dr. phil. F. Noether.

Tag der mündlichen Prüfung : 20. M ä r z 1930.

PHOTOMECHAN-DRUCK

Geschw. Erbe, Breslau I, Schmiedebrücke Nr. 29 a.

I n h a l t .

Seite:

A) Bericht über den bisherigen Stand..... 3

B) Ziele und allgemeine Grundlagen..... 11

C) I. Rahmen mit Fundamentplatte unveränderlichen Querschnittes..... 14

II. Rahmen mit Fundamentplatte veränderlichen Querschnittes..... 52

D) Praktische Bedeutung der Ergebnisse..... 73

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A. Bericht über den bisherigen Stand.

Bei mehrfach statisch unbestimmten Rahmen sind, wie bekannt, die Bewegungen der Fundamente infolge nachgiebigen Baugrundes oft von beträchtlichem Einfluß. Sind die Stiele der Rahmen auf einzelne Blockfundamente, die man als „starr" bezeichnen kann, gegründet und mit ihnen biegungsfest verbunden, so macht die Berücksichtigung der Fundamentbewegungen bei der statischen Berechnung des Rahmensystems keine Schwierigkeit.[1] Verbindet man diese Einzelfundamente aber untereinander zu einem durchgehenden Fundament, so kann man bei Vermeidung unwirtschaftlicher Konstruktionen infolge der größeren Länge des Fundamentes im Verhältnis zu seinem Querschnitt nicht mehr von einem „starren" Gründungskörper sprechen. Es treten weitere statische Unbestimmtheiten in die Rechnung ein, die bei ausgeführten rahmenartigen Bauwerken mit massiver Sohle, wie Durchlässe, Tieftunnel u. dgl., dazu Anlaß gegeben haben, die unbestimmten Größen dadurch auszuschalten, daß man die Sohle vom Rahmen trennte. Man nahm dafür dann andere Nachteile in Kauf, wie stärkere Querschnittbemessung sowohl der Rahmenstiele wie der Querriegel und kostspielige und nicht immer zuverlässig haltbare Dichtungen der Sohlenfugen.[2]

---

1) Vergl. Ritter: Der biegungsfeste Rahmen mit Flächenlagerung. Schweiz.Bztg. 1913, Heft 20 S. 265 und
Brugsch & Briske: Einfluß der Nachgiebigkeit des Baugrundes auf die Berechnung äußerlich statisch unbestimmter Bauwerke, Beton u. Eisen 1914, Heft 1, 3 u. 4.

Sehr oft stellt der Zusammenschluß einzelner Teile einer Konstruktion zu einem geschlossenen Ganzen die wirtschaftlich günstigere Bauart dar so auch die Heranziehung der Sohle zur Mitwirkung am ganzen Rahmenwerk. Dabei ist wohl weniger an die entlastende Rückwirkung der steifverbundenen Sohle auf den Rahmen gedacht, als gerade an die Lastverteilung auf den Baugrund. Abgesehen von dem unzulänglichen sogenannten " praktischen " Verfahren - praktisch in der schlechten Bedeutung des Wortes - die Bodenbeanspruchung als linear über das "starr gedachte Fundament verteilt anzunehmen - selbst bei mittig belasteten wagerechten Flächen mit fast unbegrenzter Steifigkeit braucht diese Annahme, wie F. Emperger durch Versuche festgestellt hat, [3] nicht zuzutreffen - suchte man in Anlehnung an die später ausführlich betrachtete Winkler-Schwedlersch Auffassung die Bodenelastizität auf dem Näherungswege in die Berechnung des Rahmenwerkes einzuführen so durch dreieckförmige Lastverteilung unter der

---

2) Vergl. A. Schröter: Die wirtschaftliche Querschnittsgestaltung der Untergrundbahn-Tunnel, Bauingenieur 1925, Heft 34 S. 952.

3) F. Emperger: Die zulässige Belastung des Baugrundes, Bautechnik 1926, Heft 16, siehe auch

F. Kögler: Ueber die Verteilung des Bodendruckes unter Gründungskörpern, Bauingenieur 1926, Heft 6.

steifverbundenen Sohle, [4] andererseits durch Annahme mathematisch vereinfachten Verlaufes der Senkungslinie. [5] Erstere Annahme ist aber willkürlich, letztere ein unvorteilhafter Ersatz der Winklerschen Gleichungen.

Die strengere Behandlung der Aufgabe stützt sich auf die Winkler-Schwedlersche Annahme, [6] die besagt, daß bei einem Balken auf elastisch nachgiebiger Unterlage die Größe des an einer beliebigen Stelle herrschenden Gegendruckes p dem dort auftretenden Einsenkungsmaß y verhältnisgleich, d.h. daß $p = Cy$ ist. Als Einwände gegen diese Annahme wurde geltend gemacht, daß der Baugrund nur unvollkommen elastisch ist, daß die Bodenbewegung nicht nur im Bereich der Fundamentfläche ausgelöst wird und daß zudem beim Eindringen in die Unterlage am Flächenrande Scheerspannungen zu überwinden sind. [7]

---

4) Handbuch f. Eisenbetonbau, Bd.8 , 3. Auflage 1922, S. 477 ff.

A. Schröter, Untergrundbahnhof Belle-Alliance-Strasse Berlin , Bauingenieur 1924, Heft 16.

Nolte & Repening: Statische Berechnung von Tieftunneln, Bautechnik 1925, Heft 52, S. 723.

5) W. Schnidtmann: Beitrag zur Ermittelung von Fundamentpressungen, Dissertation Stuttgart 1919.

6) E. Winkler: Elastizität und Festigkeitslehre, 1867.

J.W. Schwedler's Abhandlung, in deutscher Übersetzung im Centralblatt d. Bauverwaltung 1891, S.90.

7) siehe K. Wieghardt: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage, Ztschr.f.angew. Mathem.u.Mechanik 1922,H.3,S.165.

Was die "nur unvollkommene Elastizität" des Bodens angeht, so haben Föppl und Terzaghi [8] an Hand von Bodenbelastungsversuchen nachgewiesen, daß für kleine Druckwerte, um die es sich praktisch wohl immer handelt, Druck- und Einsenkungsmaß im geraden Verhältnis zu einander wachsen. Bei Terzaghi ist dies durch Drucksenkungsdiagramme für verschiedene Bodenarten veranschaulicht. Versuche von C. Wolterbeek [9] haben gezeigt, daß mit der Größe der Lastfläche die bleibenden Senkungen ab-, die elastischen dagegen zunehmen. Da es sich bei geschlossenen Rahmenwerken stets um ausgedehnte Fundamentflächen handelt, so findet auch für wiederkehrende Belastungen die Winklersche Annahme hier ihre Begründung. Es ergibt sich damit von selbst, daß innerhalb großer Fundamentflächen der Einfluß der außerhalb stattfindenden Bodenbewegungen kaum zur Geltung kommen kann und daß in dem Falle, daß das Bauwerk etwa als Tieftunnel ringsum vom Boden eingeschlossen ist, auch die Bodenbewegungen unter den Rändern der Sohle sich nach dem außerhalb befindlichen belasteten Boden zu ähnlich verhalten wie die Bewegungen im Inneren der Sohle nach den benachbarten Bodenteilen zu, da in beiden Fällen eventuell sich seitlich auslösende Bewegungen gleichermaßen vor sich gehen.

---

8) A. Föppl: Vorlesungen ü. Techn. Mech. Bd.III, S. 238, (1914)
Terzaghi: "Erdbaumechanik",Verl. Deutike, Leipzig 1925.

9) Bericht über die Versuche von C. Wolterbeek, Bautechnik 1925, S. 413 (Aus d. Holländ. Ztschr. " Der Ingenieur ", 1921.)

Ferner können die Scheerspannungen am Rande nicht erheblich ins Gewicht fallen.

An dieser Stelle möge noch die Lehre von Boussinesq erwähnt werden, die für den Idealfall des homogenen, isotropen und vollkommen elastischen Bodens entwickelt ist. Diese Theorie des sogenannten "elastisch - isotropen Halbraumes" ist von F. Schleicher auf einige einfache Belastungsfälle angewandt worden [10] und zwar für die beiden Grenzfälle der verschwindend kleinen und unendlich großen Plattensteifigkeit, um einmal über den Bodendruck und das andere Mal über die Senkung, über deren Verhältnis zu einander nichts ausgesagt ist, Annahmen machen zu können. Für sehr steife und kleine Fundamente hat Schleicher Uebereinstimmungen seiner Ergebnisse mit bekannten Versuchen gezeigt.

Mit der Winklerschen Annahme $p = Cy$ lautet die Differentialgleichung der elastischen Balkenlinie, für den Fall, daß Balkenbreite b, Elastizitätsmaß des Balkenmaterials E, Bodenmodul C und Trägheitsmoment J unveränderlich sind

$$\frac{EJ}{Cb}\,\frac{d^4y}{dx^4} + y = \frac{q}{C}$$

q bedeutet hierbei die veränderliche Belastung des Balkens pro Flächeneinheit. Die Lösung dieser Gleichung ist in bekannter Weise durch eine Summe

---

10) F. Schleicher: Zur Theorie des Baugrundes, Bauingenieur 1926, Heft 48, S. 931 ff. und Beton u. Eisen 1927, H. 10.

von Produkten von Hyperbel- und Kreisfunktionen darstellbar. Sie wurde außer von Winkler von J. W. Schwedler [6] und H. Zimmermann [11] bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues verwandt und später auf die Berechnung von Baugrundbeanspruchungen ausgedehnt [12], wobei die Untersuchungen vorzugsweise für spezielle Lastfälle durchgeführt wurden. [13]

---

11) H. Zimmermann: Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues , Berlin 1888.

12) O. Fröhlich: Berechnung von Fundamenten unter Berücksichtigung der Elastizität des Baugrundes, B. u. E. 1913, S. 318 ff.

K. Hayashi: Ueber Balken auf elastischer Unterlage, Eisenbau 1914 , H. 7.

13) A. Freund: Theorie der gleichm. elst. gestützten Körper, B.u.E. 1917, S.144 ff, 1919 S.105, ff, Berechnung von Bohlwänden nach der Elastizitätslehre, Ztschr. f. Bauwesen 1919, S. 482, Beitrag zur Berechnung der biegsamen Gründungssohlen Ztschr. f. Bauw. 1924, S. 109 , Erweiterte Theorie für die Berechnung von Schleusenböden und ähnlichen Gründungskörpern, Ztschr. f. Bauw. 1927, H. VI u. VIII.

K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elast. Unterlage, J.Springer, Berlin, 1921.

K. v. Sanden & F. Schleicher: Zur Theorie des Balkens auf elast. Unterlage, B.u.E. 1926, S.83.

P. Pasternak: Die baustat. Theorie biegefester Balken und Platten auf elast. Bettung, B.u.E. 1926, S. 163.

Eine weitere Möglichkeit, die genannte Differentialgleichung aufzulösen, besteht in der Integration durch unendliche Reihen, deren Anwendung infolge der vermehrteren Rechenarbeit nur in solchen Fällen zu empfehlen ist, wo die erstgenannte Lösungsart versagt. Ein solcher Fall ist gegeben, wenn das Produkt $\frac{E\,J}{C\,b}$ veränderlich ist. Das Verfahren scheitert häufig wegen der mangelnden Konvergenz. Aehnlich verhält es sich mit der bisherigen graphischen Behandlung von Fundamentschwellen [14], welche nur mühselig zum Ziele führt, da das Verfahren bei Außerachtlassung gewisser, noch zu erörternder Maßnahmen ebenfalls sehr schlecht konvergiert.

Einen Näherungsweg für die Berücksichtigung veränderlichen Trägheitsmomentes bei konstanter Breite hat P. Pasternak bekannt gegeben [15]. In die Differentialgleichung für die gesuchte Momentenlinie

$$M^{IV} + \frac{Cb}{EJ} M = 0$$

(wo b = Balkenbreite) setzt er an Stelle des vierten Differentialquotienten den vierten Differenzenquotient ein, der für Teillängen Δ des Balkens gebildet ist, und erhält hierdurch bei n Schnittpunkten n fünfgliedrige symmetrische Differenzengleichungen von der Form

$$M_{r-2} - 4M_{r-1} + \left(6 + \frac{Cb}{EJ_r}\Delta^4\right) M_r - 4M_{r+1} + M_{r+2} = 0$$

zu welchen noch vier Randbedingungen hinzutreten,

---

14) G. Mantel: Statische Untersuchung einer Flußeisen-Querschwelle veränderlichen Querschnittes, Schweiz.Bauztg.Bd.16, 1890, S.27 u. 33.
A. Föppl: s. Fußnote 8) dortselbst S.245.
(Forts. n.S.)

wodurch die n unbekannten Momente bestimmt sind. Welche Geauigkeit mit diesem Näherungsverfahren praktisch zu erreichen ist, hat Pasternak nicht nachgewiesen.

Ein genaueres Verfahren bei veränderlichen Trägheitsmomenten ist von Herrn Prof. Mann in seminaristischen Uebungen entwickelt worden, auf welches sich die nachfolgenden Berechnungen stützen.

Ein Beispiel für die Berechnung eines geschlossenen Rechteckrahmens ohne Mittelstütze unter Einbeziehung der Sohle als elastisch gelagerter Träger hat H. Craemer für gleichbleibende Sohlenstärke gegeben [16]. Als statisch unbestimmtes Hauptsystem benutzt er den geschlossenen Rahmen mit statisch bestimmter Lagerung und führt die Bodenpressung des unteren Riegels als statisch unbestimmte Größe ein. Durch Gleichsetzung der Verdrehungen und der Querkräfte an den unteren Rahmenecken werden die Elastizitätsgleichungen erhalten. Obschon Formeln für das Hauptsystem verwandt und die Symmetrie-Verhältnisse des Systems ausgenutzt sind, ist der Rechnungsgang und auch die numerische Auflösung der Endgleichungen sehr umfangreich geblieben.

M. Ritter: Anwendungen der graph. Statik, Teil III, Zürich 1900, S.201.

Halter: Zur Kenntnis der Eisenbahnschwellen aus Eisenbeton, Bautechnik 1926 H. 1.

K. Beyer: Die Statik im Eisenbetonbau (Sammlung Deutscher Beton-Verein), Wittwer, Stuttgart 1927, S.73.

15) Beton u. Eisen 1926, Heft 10, S. 175.

16) H. Craemer: Zur Berechnung geschlossener Kastenrahmen auf elast. Baugrund, Bauingenieur 1925, H. 15, S.527.

B. Ziele und allgemeine Grundlagen.

Im I. Teil der vorliegenden Arbeit wird für einen geschlossenen Rechteckrahmen von dreifacher statischer Unbestimmtheit mit durchgehender Fundamentplatte und einen solchen mit im oberen und unteren Riegel eingespanntem Mittelstiel von sechsfacher Unbestimmtheit ein numerisch einfacher und zuverlässiger Rechnungsgang durchgeführt. Der II.Teil der Arbeit dient der Untersuchung, inwieweit die Beanspruchung des dreistieligen Rahmens, vornehmlich der Fundamentplatte, durch Annahme veränderlichen Querschnittes innerhalb der Fundamentplatte beeinflußt wird. Dabei stellte sich heraus, daß die Veränderlichkeit des Querschnittes am einzelnen Stab, z. B. ein stärkerer Anlauf die Kräfteverteilung wesentlich beeinflußt. Zur Erzielung zuverlässiger Ergebnisse gelangt daher das oben genannte genauere Verfahren zur Anwendung.

Bei der Berechnung unter der Annahme $p = Cy$ wird vorausgesetzt, daß der Erdboden am ganzen Fundamentkörper gedrückt wird. Bei dem vorliegenden Rahmensystem wird dies durch das Eigengewicht des Tragwerkes gewährleistet.

Was die Größe von C angeht, so wäre zu ihrer genauen Ermittelung eine jedesmalige Probebelastung des vorhandenen Baugrundes hinreichend, wenn C außer von der Bodenart nicht auch von Form und Größe der Belastungsfläche abhängen würde, wie aus den bereits erwähnten Versuchen von Wolterbeek und denjenigen

von Bâstian u. a. [17] hervorgeht. Solche Beziehungen kommen auch in den Formeln von Schleicher [10] für den Idealfall vollkommener Bodenelastizität zum Ausdruck. Terzaghi gibt in seinem genannten Buche auf S. 238 eine Uebersicht der Größe von C aus bisherigen Versuchsergebnissen für bestimmte Bodenarten. Für aus rein elastischen Senkungen abgeleitete Werte von C hat Schleicher in B. u. E. 1927 [10] eine Tabelle der bisher bekannt gewordenen Zahlengrößen aufgestellt. Soweit sich aus den wenigen Angaben erkennen läßt, dürfte die untere Grenze von C für die gewöhnlich vorkommenden Bodenarten etwa bei 6 kg./cm^3 anzusetzen sein. Hayashi hat in seinem Buche über den elastisch gelagerten Träger für den Spezialfall einer Einzellast in der Mitte eines Balkens für verschiedene Werte von C (dort "K" genannt) die zugehörigen Werte für das Hauptmoment unter der Last in einer Kurve aufgetragen. Der Verlauf dieser Linie zeigt von C = 6 kg./cm^3 ab eine nur schwach fortschreitende Verminderung des Momentes mit zunehmendem C. Zieht man nebenbei die Ergebnisse von A.Schröter[2] in Betracht, nach denen sich die Pressungslinien einer innerhalb der Grenzen von C = 5 bis 20 kg/cm^3 durchgerechneten Sohle eines Tunneltroges nahezu alle deckten, ferner das von Brugsch u. Briske behandelte

---

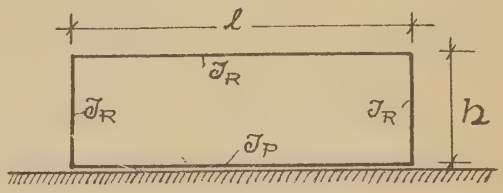
17) R. Bastian: Das elastische Verhalten der Gleisbettung und ihrea Untergrundes, Wiesbaden 1906

s. a. Emperger Fußnote 3.

behandelte Beispiel eines Bogens mit nachgiebig gelagerten steifen Widerlagern [1], das für die Werte C = 1, 10 und 100 kaum merkliche Unterschiede in der Beanspruchung des Bogens ergibt, so wird man annehmen können, daß die Ungewißheit über den Wert von C innerhalb nicht zu großer Grenzen für die Zuverlässigkeit der Rechnung bei geschlossenen Rahmenwerken zu Bedenken keinen Anlaß gibt.

C 1. Der durchlaufend gestützte Rahmen mit gleichbleibendem Trägheitsmoment innerhalb der Fundamentplatte.

a) Der einfache Rahmen.



Als statisch bestimmtes Hauptsystem diene der vom Bodenriegel getrennte Halbrahmen mit gelenkig festem und horizontal beweglichem Auflager. Um drei von einander unabhängige Elastizitätsgleichungen zu erhalten, werden die an den Schnittstellen auftretenden Lagerkräfte - links A, H, M_a, rechts B, H und M_b durch das äquivalente Kräftesystem X, Y, Z, die im elastischen Schwerpunkt S des geschlossenen Systems angreifen, und durch die Auflagerkräfte Ao und Bo ersetzt. (Abb. 1.). Bezeichnet man alle auf das Hauptsystem sich beziehenden Größen mit dem Index O und den Abstand des Schwerpunktes S von der Auflagerlinie mit f, so bestehen folgende Beziehungen:

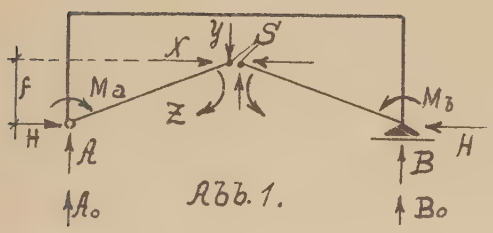


Abb. 1.

$$A = A_o - Y$$

$$B = B_o + Y$$

$$M_a = X \cdot f + Y \frac{l}{2} + Z \qquad (1)$$

$$H = X$$

$$M_b = X \cdot f - Y \frac{l}{2} + Z$$

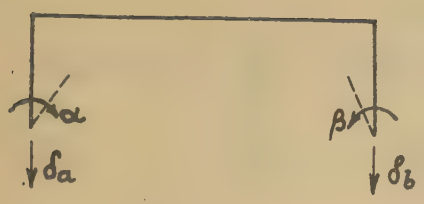


Abb.2.

Vorzeichenregel: Als positiv gelten die Verdrehungen der Auflager nach dem Rahmeninnern zu und ihre Senkungen (Abb. 2.)

Bezeichnet seien Drehwinkel und Senkungen links mit α , δ_a und rechts mit β , δ_b . Ihnen entsprechen die Wege des Punktepaares S

in Richtung X .....$f(\alpha+\beta)$

" " Y .....$\delta_a - \delta_b + \frac{l}{2}(\alpha-\beta)$

" " Z .....$\alpha+\beta$

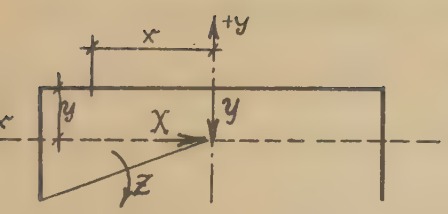


Abb.3.

Wird der elastische Schwerpunkt als Koordinaten-Nullpunkt gewählt, Abszisse x nach links, Ordinate y nach oben positiv gerechnet (Abb.3.), so ist das Moment im Punkte x,y

$$M = M_o - X\cdot y + Y\cdot x + Z \quad ..... \quad (2).$$

Ist das Trägheitsmoment des oberen Halbrahmens durchgehend J_R, so lauten die Elastizitätsgleichungen unter Vernachlässigung des Einflusses der Normal-und Querkräfte:

$$\underline{\text{Zustand X = - 1}}$$

$$L_1 = -f(\alpha+\beta) = \int (M_o - Xy + Yx + Z)y\frac{ds}{EJ_R}$$

$$= \int M_o y \frac{ds}{EJ_R} - X\int y^2 \frac{ds}{EJ_R} + Y\int xy \frac{ds}{EJ_R} + Z\int y \frac{ds}{EJ_R}$$

Da $\int xy \cdot ds = 0$ ist, wird

$$-f(\alpha+\beta) = \int M_o y \frac{ds}{EJ_R} - X\int y^2 \frac{ds}{EJ_R} + Z\int y \frac{ds}{EJ_R} \quad ..(3)$$

$$\underline{\text{Zustand Y = - 1}}$$

$$L_2 = -(\delta_a - \delta_b) - \frac{l}{2}(\alpha-\beta) = -\int (M_o - Xy + Yx + Z)\cdot x \frac{ds}{EJ_R}$$

Da $\int xy\cdot ds$ und $\int x\cdot ds = 0$ sind, folgt

$$\delta_a - \delta_b + \frac{l}{2}(\alpha-\beta) = \int M_o x \frac{ds}{EJ_R} + Y\int x^2 \frac{ds}{EJ_R} \quad \cdots \quad (4)$$

Zustand Z = - 1

$$L_3 = -(\alpha+\beta) = -\int (M_o - Xy + Yx + Z)\,\frac{ds}{EJ_R}\,, \text{hieraus}$$

$$\alpha+\beta = \int M_o \frac{ds}{EJ_R} - X\int y\,\frac{ds}{EJ_R} + Z\int \frac{ds}{EJ_R} \quad \cdots (5)$$

Fundamentplatte:

Der Berechnung wird ein Ausschnitt von 1,0 m Breite zu Grunde gelegt. Die an der Sohlenplatte angreifenden Kräfte sind in Abb. 4. dargestellt. Als Vorzeichenregel gilt das beim Halbrahmen Gesagte. Das Trägheitsmoment der Platte sei konstant und werde mit J_P bezeichnet, mit $\alpha', \alpha'', \alpha''', \beta' \ldots \delta_a' \ldots$ u.s.f. die Verschiebungen an den Plattenenden infolge der drei Lastzustände X,Y,Z = - 1. Aus Abb. 4 sind somit folgende Beziehungen zu erkennen:

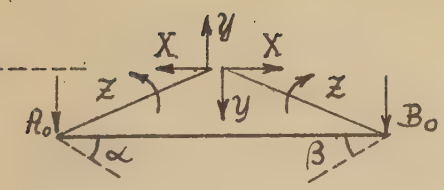


Abb.4.

$$\alpha = \alpha_o - \alpha' X - \alpha'' Y - \alpha''' Z$$
$$\beta = \beta_o - \beta' X - \beta'' Y - \beta''' Z$$
$$\delta_a = \delta_a^o - \delta_a' X - \ldots\ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

wobei $\alpha' = \alpha''' \cdot f = \beta' = \beta''' \cdot f$ und $\alpha'' = -\beta''$ ist. Somit erhält man

$$\alpha+\beta = \alpha_o+\beta_o - (\alpha'+\beta')X - (\alpha''+\beta'')Y - (\alpha'''+\beta''')Z$$
$$\alpha+\beta = \alpha_o+\beta_o - (\alpha'''+\beta''')(Xf+Z),$$

womit die Gleichung (3) übergeht in

$$-f(\alpha_o+\beta_o) + (\alpha'''+\beta''')(Xf^2+Zf) = \int M_o y \frac{ds}{EJ_R} - X\int y^2\frac{ds}{EJ_R} + Z\int y\frac{ds}{EJ_R}$$

f wird so bestimmt, daß es der Bedingung genügt

$$(\alpha'''+\beta''')f = \int y\frac{ds}{EJ_R}\,, \text{ d.h. daß}$$

$$f = \frac{\int y\frac{ds}{EJ_R}}{\alpha'''+\beta'''} = \frac{\int y\,ds}{2EJ_R\alpha'''} \text{ wird; daraus folgt:}$$

$$X = \frac{\int M_0 y \frac{ds}{EJ_R} + f(\alpha_0 + \beta_0)}{\int y^2 \frac{ds}{EJ_R} + f^2(\alpha''' + \beta''')} \quad \text{oder}$$

$$X = \frac{\int M_0 y\, ds + EJ_R f(\alpha_0 + \beta_0)}{\int y^2 ds + 2EJ_R f^2 \alpha'''}$$

Die Gleichung (5) lautet:

$$\alpha_0 + \beta_0 - (\alpha''' + \beta''')(Xf + Z) = \int M_0 \frac{ds}{EJ_R} - X\int y \frac{ds}{EJ_R} + Z\int \frac{ds}{EJ_R}$$

hieraus $$Z = \frac{-\int M_0 ds + EJ_R(\alpha_0 + \beta_0)}{\int ds + 2EJ_R \alpha'''}$$

Mit den Umformungen

$$\delta_a - \delta_b = \delta_a^\circ - \delta_b^\circ - (\delta_a'' - \delta_b'')y \quad \text{und}$$

$$\alpha - \beta = \alpha_0 - \beta_0 - (\alpha'' - \beta'')y \quad \text{lautet Gleichung (4)}$$

$$\delta_a^\circ - \delta_b^\circ - (\delta_a'' - \delta_b'')y + \frac{\ell}{2}(\alpha_0 - \beta_0) - \frac{\ell}{2}(\alpha'' - \beta'')y = \int M_0 x \frac{ds}{EJ_R} + y\int x^2 \frac{ds}{EJ_R} \quad \text{und es}$$

wird $$y = \frac{-\int M_0 x\, ds + EJ_R\left[\delta_a^\circ - \delta_b^\circ + \frac{\ell}{2}(\alpha_0 - \beta_0)\right]}{\int x^2 ds + 2EJ_R\left[\delta_a'' + \frac{\ell}{2}\alpha''\right]}$$

Abb.5

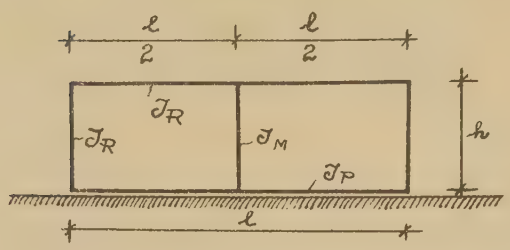
Zur Bestimmung von f setzt man $y = \eta - f$ (Abb.5.) in die Gleichung für f ein:

$$2EJ_R\, \alpha'''f = \int \eta ds - f\int ds \quad \text{und}$$

$$f = \frac{\int \eta\, ds}{\int ds + 2EJ_R \alpha'''}$$

In den Formeln treten lediglich die Verdrehungen und Senkungen an den Enden der Sohle auf, deren Bestimmung später erfolgen wird.

b) Der zweifache Rahmen.



Der mit oben und unten fest verbundener Mittelstütze versehene Recheckrahmen ist sechsfach innerlich statisch unbestimmt. Seine Berechnung erfolgt mit Hilfe des einfachen Rahmens als statisch unbestimmten Hauptsystems (Abb.6.). Die am Fuss der Mittelstütze durch deren Trennung von der Sohle auftretenden Kräfte werden ersetzt durch die statisch unbestimmten Größen U_a, U_b und U_c am Hebelarm t. Am Fuß der Mittelstütze gelten Senkung δ_c und Drehung γ im Uhrzeigersinn positiv, sowohl für den oberen Rahmenteil wie für die Platte (Abb. 7.).

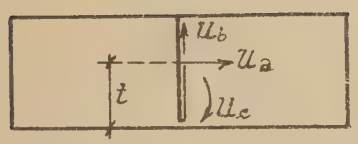


Abb.6.

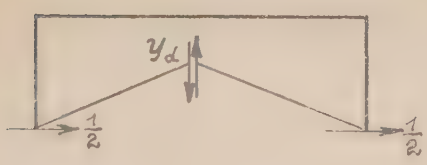
Abb. 7.

Zur Herleitung der Grundzustände sind folgende drei Lastfälle am einfachen Rahmen zu betrachten:

1.) Hilfszustand d (Abb. 8 u. 9.)

Abb. 8u. 9.
Zustand d.

In den Rahmenschnitten bei a und b entsteht je eine Gegenkraft $\frac{1}{2}$. Daneben treten noch Kräfte Y auf, die mit Y_d benannt seien, dagegen sind X und Z aus Gründen der Antimetrie gleich Null.



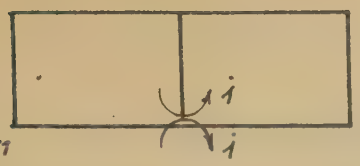
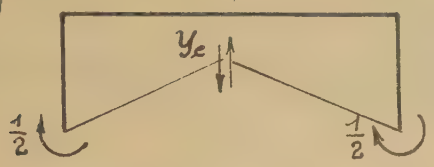


Abb. 10 u. 11

$U_c = -1$



2.) Zustand $U_c = -1$ (Abb. 10 u. 11.)

Bei a und b tritt je ein Gegenmoment von der Größe $\frac{1}{2}$ auf, außerdem wirkt wie bei 1) Y_c.

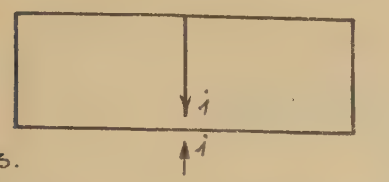
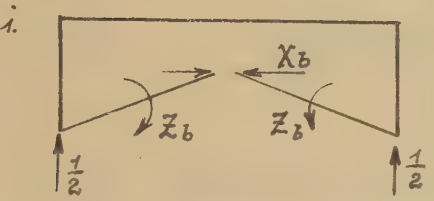


Abb. 12 u. 13.

$U_b = -1$

3.) Zustand $U_b = -1$ (Abb. 12. u. 13.)

Die Gegenkräfte bei a und b haben je die Größe $\frac{1}{2}$. Neben diesen wird das System infolge der symmetrischen Belastung von X_b und Z_b beansprucht, Y dagegen tritt nicht auf.



Durch Unterdrückung der auftretenden Nebenkräfte entstehen die den einzelnen Zuständen entsprechenden M_o = Flächen $\overline{M}_d$, $\overline{M}_c$ u. $\overline{M}_b$. Die dabei an der Sohle angreifenden Reaktionen erzeugen die Größen α_o, β_o, δ_a° und δ_b° (Abb. 14-16). Durch Anwendung der Formeln für X,Y,Z lassen sich nunmehr Y_d, Y_c, X_b und Z_b bestimmen. Der Zustand $U_a = -1$ wird erzeugt durch Vereinigung der beiden Fälle d und $U_c = -1 \cdot t$. Außer den dabei auftretenden Kräften bei a und b (Abb. 17 und 18) entsteht $Y_a = Y_d + t \cdot Y_c$. Nach Gleichung (2) ergeben sich nunmehr die M_a-, M_b- und M_c- Flächen.

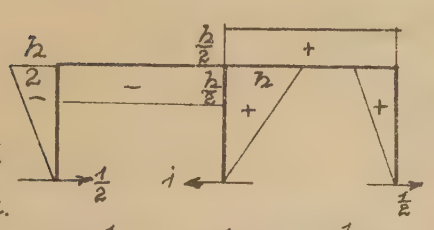


Abb. 14
$\overline{M}_d$ = Fl.

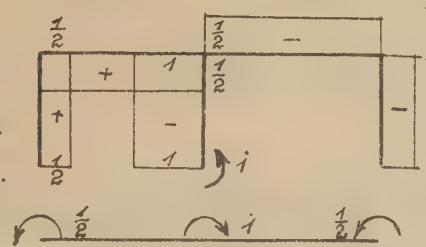


Abb. 15.
$\overline{M}_e$ = Fl.

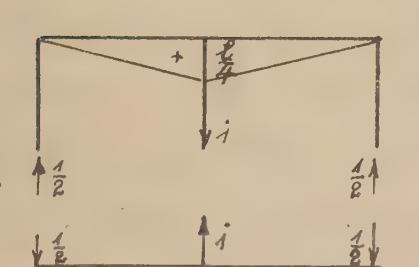


Abb. 16.
$\overline{M}_b$ = Fl.

Den Verschiebungen am Fuß der Mittelstütze folgen die Wege

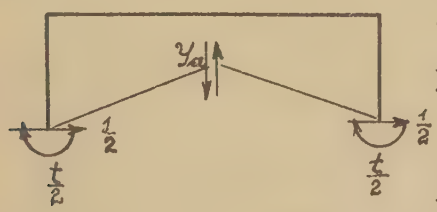
in Richtung U_a ..... $t \cdot \gamma$

" " U_b ..... $-\delta_c$

" " U_c ..... γ

Abb. 17 u. 18.

$U_a = -i$



Durch Anwendung der Arbeitsgleichung auf die Lastzustände $\overline{M}_a$, $\overline{M}_b$, $\overline{M}_c$ und die wirklichen Formänderungen gelangt man zu folgenden Elastizitätsgleichungen:

Lastzustand $\bar{c}$:

$$L_c = \frac{1}{2}(\alpha-\beta) - 1\cdot\gamma = \int M \overline{M}_c \frac{ds}{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots 8)$$

Lastzustand $\bar{a}$:

$$L_a = \frac{t}{2}(\alpha-\beta) - t\cdot\gamma = \int M \overline{M}_a \frac{ds}{EJ} \quad \ldots\ldots\ldots 6)$$

Lastzustand $\bar{b}$:

$$L_b = -\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_b) + 1\cdot\delta_c = \int M \overline{M}_b \frac{ds}{EJ} \ldots\ldots 7)$$

M ist durch die Gleichung bestimmt:

$$M = M_o - M_a U_a - M_b U_b - M_c U_c$$

Hierin stellen M_o, M_a ... die Momente am einfachen Rahmen dar. Den früheren Ausführungen entsprechend ist zu setzen:

$$\alpha = \alpha_o - \alpha_a U_a - \alpha_b U_b - \alpha_c U_c; \quad \beta \text{ analog,}$$

wodurch die Elastizitätsgleichung (6) folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{t}{2}(\alpha_o-\beta_o) - \frac{t}{2}(\alpha_a-\beta_a)U_a - \frac{t}{2}(\alpha_b-\beta_b)U_b - \frac{t}{2}(\alpha_c-\beta_c)U_c$$
$$-t\gamma_o + t\gamma_a U_a + t\gamma_b U_b + t\gamma_c U_c - \int M \overline{M}_a \frac{ds}{EJ}.$$

Unter Beachtung, daß $\alpha_b - \beta_b = 0$ und $\gamma_b = 0$ sind, dass ferner $\alpha_a = \alpha_d + t\alpha_c$ und $\overline{M}_a = \overline{M}_d + \overline{tM}_c$ lautet die Gleichung nach einiger Umformung:

$$-t\left(\gamma_o - \frac{\alpha_o-\beta_o}{2}\right) + U_a\left[t^2\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c-\beta_c}{2}\right) + t\left(\gamma_d - \frac{\alpha_d-\beta_d}{2}\right)\right]$$
$$+U_c\cdot t\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c-\beta_c}{2}\right) = \int M_o \overline{M}_a \frac{ds}{EJ} - U_a \int M_a \overline{M}_a \frac{ds}{EJ}$$
$$-U_c\left[\int M_c \overline{M}_d \frac{ds}{EJ} + t\int M_c \overline{M}_c \frac{ds}{EJ}\right]$$

Die Größe t wird durch die Beziehung festgelegt: $t\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c-\beta_c}{2}\right) = -\int M_c \overline{M}_d \frac{ds}{EJ} - t\int M_c \overline{M}_c \frac{ds}{EJ}$

sodaß $$t = \frac{-\int M_c \overline{M_d} \frac{ds}{EJ}}{\int M_c \overline{M_c} \frac{ds}{EJ} + \gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}}$$ wird.

Für U_a ergibt sich damit der Ausdruck:

$$U_a = \frac{\int M_o \overline{M_a} \frac{ds}{EJ} + t\left(\gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2}\right)}{\int M_a \overline{M_a} \frac{ds}{EJ} + t^2\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}\right) + t\left(\gamma_d - \frac{\alpha_d - \beta_d}{2}\right)}$$

Entwickelt man δ_a und δ_b entsprechend α, beachtet, daß $\delta_a^a + \delta_b^a$, $\delta_a^c + \delta_b^c$, δ_c^a, δ_c^o, $\int M_a \overline{M_b}\, ds$ und $\int M_c \overline{M_b}\, ds$ verschwinden, so geht Gleichung (7) über in

$$-\frac{1}{2}(\delta_a^o + \delta_b^o) + \frac{1}{2}(\delta_a^b + \delta_b^b)U_b + \delta_c^o - \delta_c^b U_b - \int M \overline{M_b} \frac{ds}{EJ} = \int M_o \overline{M_b} \frac{ds}{EJ} - U_b \int M_b \overline{M_b} \frac{ds}{EJ}$$

hieraus:

$$U_b = \frac{\int M_o \overline{M_b} \frac{ds}{EJ} + \frac{1}{2}(\delta_a^o + \delta_b^o - 2\delta_c^o)}{\int M_b \overline{M_b} \frac{ds}{EJ} + \frac{1}{2}(\delta_a^b + \delta_b^b - 2\delta_c^b)}$$

In gleicher Weise ergibt sich aus Gleichung(8):

$$-\left(\gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2}\right) + U_a\left[\gamma_a - \frac{\alpha_a - \beta_a}{2}\right] + U_b\left[\gamma_b - \frac{\alpha_b - \beta_b}{2}\right] + U_c\left[\gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}\right] = \int M \overline{M_c} \frac{ds}{EJ}$$

und nach entsprechender Umformung

$$-\left(\gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2}\right) + U_a\left[t\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}\right) + \gamma_d - \frac{\alpha_d - \beta_d}{2}\right] + U_c\left(\gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}\right) = \int M_o \overline{M_c} \frac{ds}{EJ} - U_a\left[\int M_d \overline{M_c} \frac{ds}{EJ} + t \int M_c \overline{M_c} \frac{ds}{EJ}\right] - U_c \int M_c \overline{M_c} \frac{ds}{EJ}$$

Da durch die getroffene Wahl t die Glieder mit U_a auf beiden Seiten gleich sind, nimmt der Ausdruck für U_c die Form an:

$$U_c = \frac{\int M_o \overline{M_c} \frac{ds}{EJ} + \gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2}}{\int M_c \overline{M_c} \frac{ds}{EJ} + \gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2}}$$

Auch in diesen Gleichungen für die stat.unbest. Größen treten nur Verschiebungen an den Enden und in der Mitte der Sohlenplatte auf.

c) Ermittelung der Formänderungen der Grundplatte.

Zur Bestimmung der am Rande und in der Mitte der Platte auftretenden Verschiebungsgrößen dient die bereits erwähnte Differentialgleichung der elastischen Linie für den auf elastischer überall gleichwertiger Unterlage ruhenden Balken von gleichbleibender Breite b :

$$\frac{E\,J}{C\,b}\,\frac{d^4y}{dx^4} + y = \frac{q}{C}$$

Für gleichmässig verteilte Last q, wie sie z.B. durch das Eigengewicht der Sohle hervorgerufen wird, tritt eine Beanspruchung weder der Sohle noch des oberen Rahmens auf. Von einer möglichen Verkehrsbelastung q soll im Hinblick auf ihre geringe Größe im Vergleich zu den ruhenden Lasten des Rahmens abgesehen werden. Aus demselben Grunde bleiben hier auch Verkehrseinzellasten in den Feldern der Platte unberücksichtigt. Als Belastungen der Platte kommen daher nur Einzellasten und Momente in Frage, die am Rande und wegen der Symmetrie des Bauwerkes in der Mitte der Platte angreifen. Setzt man nach Zimmermann

$$\sqrt[4]{\frac{4EJ}{Cb}} = L \quad und \quad \frac{x}{L} = \xi$$

so geht die Gleichung mit q = 0 über in

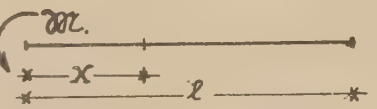
$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$y = A\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\xi + B\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\xi + D\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\xi + F\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\xi \quad ^{18)}$$

Durch dreimalige Differentation erhält man daraus die Werte für Verdrehung, Moment und Querkraft der Platte. Mit Hilfe dieser vier Ausdrücke lassen sich für jeden speziellen Belastungsfall durch Einführung der jeweiligen Grenzbedingungen die Konstanten A bis F ermitteln. Im Umfange der hier zu behandelnden Aufgabe sind vier von einander getrennte Belastungsfälle zu unterscheiden, Einzellast P und Moment $\mathfrak{M}$ am Ende und in der Mitte der Platte angreifend. Die Untersuchung soll dabei bei 1 cm Plattenbreite erfolgen. Es bedeuten daher $\mathfrak{M}$ und P die Lasten auf 1 cm Plattenbreite. Die Gleichungen für die Senkung y und das Biegungsmoment M zur späteren Ermittelung der Senkungs- und Momentenkurven lauten mit $\lambda = \frac{l}{L}$:

Fall 1)



$$y = \frac{2\mathfrak{M}}{CL^2}\Big[(\mathfrak{Cof}\,\xi - \mathfrak{Sin}\,\xi)(\cos\xi - \sin\xi)\Big(1 + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda(\mathfrak{Cof}\,\lambda - \mathfrak{Sin}\,\lambda) + \sin\lambda(\cos\lambda + \sin\lambda)}{\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}\Big)$$
$$- \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda(\mathfrak{Cof}\,\lambda - \mathfrak{Sin}\,\lambda) + \sin\lambda(\cos\lambda - \sin\lambda)}{\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\xi$$
$$+ \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda(\mathfrak{Cof}\,\lambda - \mathfrak{Sin}\,\lambda) + \sin\lambda(\cos\lambda + \sin\lambda)}{\mathfrak{Sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\xi\Big]$$

---

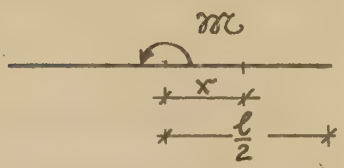
18) Statt der hier angeführten ξ = Fuktionen hat A. Freund besondere „$\mathcal{L}$" = Funktionen eingeführt, die sich durch Differentiation nacheinander ergeben. Sie sollen der Verringerung des Schreibwerks in den Zwischenrechnungen dienen.

$$M = -\mathfrak{M}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)(\cos\xi+\sin\xi)\left(1+\frac{\mathfrak{sin}\lambda(\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda)+\sin\lambda(\cos\lambda+\sin\lambda)}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)\right.$$

$$-\frac{\mathfrak{sin}\lambda(\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda)+\sin\lambda(\cos\lambda+\sin\lambda)}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{sin}\lambda(\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda)+\sin\lambda(\cos\lambda-\sin\lambda)}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

Fall 2)



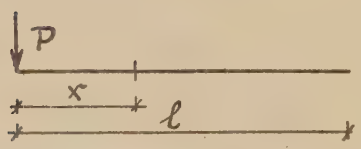
$$y = -\frac{\mathfrak{M}}{CL^2}\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)\sin\xi+\frac{1+\cos\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda-\sin\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda+1}{\mathfrak{sin}\lambda-\sin\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = \frac{\mathfrak{M}}{2}\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)\cos\xi-\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda+1}{\mathfrak{sin}\lambda-\sin\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1+\cos\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda-\sin\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

Fall 3)



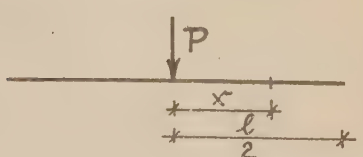
$$y = \frac{2P}{CL}\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)\cos\xi\left(1+\frac{\sin^2\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{sin}\lambda(\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda)-\cos\lambda\sin\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi-\frac{\sin^2\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = -PL\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)\sin\xi\left(1+\frac{\sin^2\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)-\frac{\sin^2\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi\right.$$

$$\left.-\frac{\mathfrak{sin}\lambda(\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda)-\cos\lambda\sin\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda-\sin^2\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

Fall 4)



$$y = \frac{P}{2CL}\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)(\cos\xi+\sin\xi)+\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda+\cos\lambda-\sin\lambda+2}{\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi\right.$$

$$\left.-\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda-\cos\lambda-\sin\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = \frac{PL}{4}\left[(\mathfrak{Cof}\xi-\mathfrak{sin}\xi)(\cos\xi-\sin\xi)+\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda-\cos\lambda-\sin\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda}\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi\right.$$

$$\left.+\frac{\mathfrak{Cof}\lambda-\mathfrak{sin}\lambda+\cos\lambda-\sin\lambda+2}{\mathfrak{sin}\lambda+\sin\lambda}\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

Bei der Aufstellung vorstehender Gleichungen wurde darauf geachtet, daß für die spätere numerische Auswertung Summenbildungen von sehr großen und sehr kleinen Zahlen, wie sie bei großem λ durch die hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen entstehen, vermieden werden. Dies geschah durch Zusammenziehung der hyperbolischen Werte zu Differenzen von der Form $(\mathfrak{Cof} - \mathfrak{Sin})$, wodurch die Größenordnung der trigonometrischen Zahlen erreicht ist. Damit vermindert sich die für die Genauigkeit der Rechnung notwendige Stellenzahl und gestattet die Anwendung des Rechenschiebers.

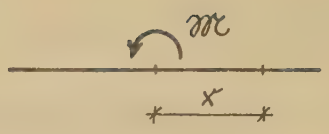
Für λ etwa $> \pi$ werden die bei Fall 1) und 3) zu der Zahl 1 hinzutretenden Brüche gegenüber 1 sehr klein. Da bei der vorliegenden Aufgabe λ bedeutend größer als π ist, können zur Vereinfachung die genannten Brüche vernachlässigt werden. Führt man für die übrigen Brüche Abkürzungen ein, so gehen die Gleichungen in folgende, z.T. also genäherte über:

Fall 1).

$$y = \frac{2m}{cL^2}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{Sin}\xi)(\cos\xi - \sin\xi) - u\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi - u\,\mathfrak{Sin}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = -m\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{Sin}\xi)(\cos\xi + \sin\xi) - u\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi + u\,\mathfrak{Sin}\xi\sin\xi\right]$$

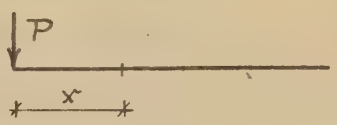
Fall 2)



$$y = -\frac{m}{CL^2}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)\sin\xi + \varkappa\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi + \beta\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = -\frac{m}{2}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)\cos\xi - \beta\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi + \varkappa\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

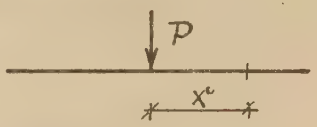
Fall 3)



$$y = \frac{2P}{CL}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)\cos\xi + \ddot{\varkappa}\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi - \varkappa_0\,\mathfrak{Cof}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = -PL\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)\sin\xi - \varkappa_0\,\mathfrak{sin}\xi\cos\xi - \ddot{\varkappa}\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

Fall 4).



$$y = \frac{P}{2CL}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)(\cos\xi + \sin\xi) + \varkappa_0\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi - \zeta\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

$$M = \frac{PL}{4}\left[(\mathfrak{Cof}\xi - \mathfrak{sin}\xi)(\cos\xi - \sin\xi) + \zeta\,\mathfrak{Cof}\xi\cos\xi + \varkappa_0\,\mathfrak{sin}\xi\sin\xi\right]$$

Hierin bedeuten

$$\varkappa_0 = \frac{\mathfrak{sin}\lambda\,(\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda) + \sin\lambda(\cos\lambda - \sin\lambda)}{\mathfrak{sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}$$

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{sin}\lambda\,(\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda) + \sin\lambda\,(\cos\lambda + \sin\lambda)}{\mathfrak{sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}$$

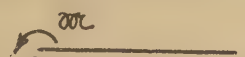
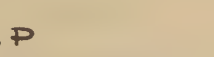
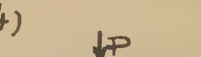
$$\varkappa = \frac{1+\cos\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda - \sin\lambda}\;; \qquad \beta = \frac{\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda + \sin\lambda + 1}{\mathfrak{sin}\lambda - \sin\lambda}$$

$$\ddot{\varkappa} = \frac{\mathfrak{sin}\lambda\,(\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda) - \cos\lambda\sin\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}\;; \quad \varkappa_0 = \frac{\sin^2\lambda}{\mathfrak{sin}^2\lambda - \sin^2\lambda}$$

$$\varkappa_0 = \frac{\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda + \cos\lambda - \sin\lambda + 2}{\mathfrak{sin}\lambda + \sin\lambda}\;; \quad \zeta = \frac{\mathfrak{Cof}\lambda - \mathfrak{sin}\lambda - \cos\lambda - \sin\lambda}{\mathfrak{sin}\lambda + \sin\lambda}$$

Die für die Gleichungen der statisch unbestimmten Größen erforderlichen Verschiebungswerte an den Enden bezw. in der Mitte der Platte - für $\xi = 0, \frac{\lambda}{2}$ und λ - sind in folgender Tafel unverkürzt zusammengestellt.

Tafel der Senkungen und Verdrehungen der Knotenpunkte a, b und c.

	1) 	2)	3) 	4) 
δ_a	$\frac{2\mathfrak{M}}{CL^2}\left(1+\frac{2\sin^2\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)$	$\frac{2\mathfrak{M}}{CL^2}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}+\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda-\sin\lambda}$	$\frac{2P}{CL}\left(1+\frac{\sin\lambda(\cot\lambda-\sin\lambda)-\sin\lambda(\cos\lambda-\sin\lambda)}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)$	δ_{c_3}
δ_b	$-\frac{2\mathfrak{M}}{CL^2}\frac{2\sin\lambda\sin\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}$	$-\delta_{a_2}$	$-\frac{2P}{CL}\frac{\cot\lambda\sin\lambda-\sin\lambda\cos\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}$	δ_{c_3}
δ_c	$-\frac{2\mathfrak{M}}{CL^2}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}-\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda+\sin\lambda}$	0	$\frac{2P}{CL}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda+\sin\lambda}$	$\frac{P}{2CL}\left(1+\frac{\cot\lambda-\sin\lambda+\cos\lambda-\sin\lambda+2}{\sin\lambda+\sin\lambda}\right)$
α	$-\frac{4\mathfrak{M}}{CL^3}\left(1+\frac{\sin\lambda(\cot\lambda-\sin\lambda)+\sin\lambda(\cos\lambda+\sin\lambda)}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)$	γ_1	$-\frac{2P}{CL^2}\left(1+\frac{2\sin^2\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}\right)$	$\frac{2P}{CL^2}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}-\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda+\sin\lambda}$
β	$\frac{4\mathfrak{M}}{CL^3}\frac{\cot\lambda\sin\lambda+\sin\lambda\cos\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}$	$-\gamma_1$	$\frac{2P}{CL^2}\frac{2\sin\lambda\sin\lambda}{\sin^2\lambda-\sin^2\lambda}$	α_4
γ	$-\frac{4\mathfrak{M}}{CL^3}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda-\sin\lambda}$	$-\frac{\mathfrak{M}}{CL^3}\left(1+\frac{\cot\lambda-\sin\lambda+\cos\lambda+\sin\lambda+2}{\sin\lambda-\sin\lambda}\right)$	$-\frac{2P}{CL^2}\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}+\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin\lambda-\sin\lambda}$	0

Die zu 1 zu addierenden Brüche sind für großes λ wieder gegen 1 sehr gering, ebenso ist $\sin\lambda$ gegen $\sin\lambda$ sehr klein und $\cot\lambda \sim \sin\lambda$.
Da die für die Rahmenkonstruktion gewählte

Berechnungsart bei Einhaltung von zwei Dezimalstellen übereinstimmende Resultate mit zwei auf 5 und mehr Dezimalstellen durchgeführten Berechnungen, bei denen die Wahl der statisch unbestimmten Größen anders getroffen war, gezeigt hat und daher die gesamte Zahlenrechnung für den Rahmen ebenfalls mit dem Rechenschieber durchgeführt wird, können die genannten Brüche und $\sin\lambda$ gegen $\gamma_{in}\lambda$ vernachlässigt werden. Wählt man für die Längen die Einheit 1 cm und setzt $\mathfrak{M}$ und P = 1 für 1 m Plattenbreite, d. h. $\mathfrak{M}$ und P = 1/100 für 1 cm Breite, so erhält man für die spezifischen Belastungen nachfolgende vereinfachte Tafel:

Tafel der vereinfachten Verschiebungsgrößen für die spezifischen Belastungen $\mathfrak{M}$ u. P = 1/100

	1) $\frac{1}{100}$ a c b	2) $\frac{1}{100}$ a c b	3) $\frac{1}{100}$ a c b	4) $\frac{1}{100}$ a c b
δ_a	$\frac{2}{100\,C\,L_1^2}$	$\frac{2}{100\,CL^2}\,\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}+\gamma_{in}\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\gamma_{in}\lambda}$	$\frac{2}{100\,C\,L_1}$	δ_{c_3}
δ_b	$-\frac{2}{100\,CL^2}\,\frac{2\sin\lambda}{\gamma_{in}\lambda}$	$-\delta_{a_2}$	$\frac{2}{100\,CL_1}\,\frac{\cos\lambda-\sin\lambda}{\gamma_{in}\lambda}$	δ_{c_3}
δ_c	$-\frac{2}{100\,CL^2}\,\frac{\cot\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}-\gamma_{in}\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\gamma_{in}\lambda}$	0	$\frac{2}{100\,CL_1}\,\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{2\gamma_{in}\frac{\lambda}{2}}$	$\frac{1}{200\,CL_1}$
α	$-\frac{4}{100\,C\,L^3}$	γ_1	$-\delta_{a_1}$	$-\delta_{c_1}$
β	$\frac{4}{100\,C\,L_1^3}\,\frac{\cos\lambda+\sin\lambda}{\gamma_{in}\lambda}$	$-\gamma_1$	$-\delta_{b_1}$	$-\delta_{c_1}$
γ	$-\frac{4}{100\,C\,L^3}\,\frac{\cos\frac{\lambda}{2}}{2\gamma_{in}\frac{\lambda}{2}}$	$-\frac{1}{100\,CL^3}$	$-\delta_{a_2}$	0

d) Zahlenbeispiel.

Um den Einfluß der auf der ganzen Länge elastisch gelagerten Sohle möglichst stark hervortreten zu lassen, wurde für das Bauwerk eine langgestreckte Form gewählt. Die Abmessungen ergeben sich aus Abb.19.

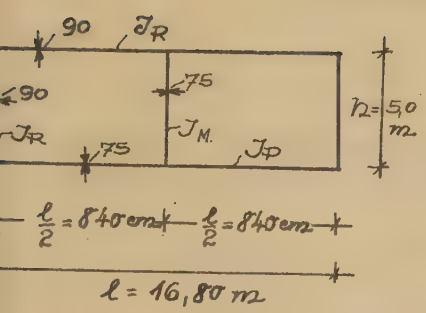


Abb. 19.

J_R sei das Trägheitsmoment des oberen Riegels und der Seitenstiele,

J_M das des Mittelstieles,

J_p das Trägheitsmoment der Sohle für 1 cm Breite.

Für C wird ein mittlerer Wert von 10 kg/cm^3 angenommen, für E des Betons der abgerundete Wert von 200 000 kg/cm^2.

Es ist demnach:

$$J_R = \frac{90^3 \cdot 100}{12} = 0{,}6085 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

$$J_M = \frac{75^3 \cdot 100}{12} = 0{,}3515 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

$$\frac{J_R}{J_M} = 1{,}725$$

$$Jp = \frac{75^3}{12} = 0{,}3515 \cdot 10^5 \cdot \text{cm}^4$$

$EJ_R = 200\,000 \cdot 0{,}6085 \cdot 10^7 = 0{,}1217 \cdot 10^{13}$ kg·cm^2

ferner

mit C = 10 kg/cm^3, $L = \sqrt[4]{\frac{4EJp}{C}} = \sqrt[4]{\frac{4.2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3515 \cdot 10^5}{10}}$

$L = 230$ cm ; $\lambda = \frac{1680}{230} = 7{,}28$; $\frac{\lambda}{2} = 3{,}64$

$\frac{1}{100\ CL} = 0{,}435 \cdot 10^{-5}$; $\frac{1}{100\ CL^2} = 0{,}1885 \cdot 10^{-7}$;

$\frac{1}{100\ CL^3} = 0{,}819 \cdot 10^{-10}$.

Mit Hilfe der Tafeln von Hayashi für die Kreis - und Hyperbelfunktionen [19] erhält man folgende, mit $E \cdot J_R = 0,1217 \cdot 10^{13}$ multiplizierten Werte für die Verschiebungen an der Sohlenplatte.

Tafel der EJ_R - fachen Verschiebungen der Knotenpunkte a,b u.c.

	1) ↷ 1/100	2) ↷ 1/100	3) ↓ 1/100	4) ↓ 1/100
δ_a	45850	- 1 640	10 600 000	δ_{c_3}
δ_b	- 106	$-\delta_{a_2}$	- 4 350	δ_{c_3}
δ_c	- 481	0	- 246 000	2 650 000
α	- 398	γ_1	$-\delta_{a_1}$	$-\delta_{c_1}$
β	0,76	$-\gamma_1$	$-\delta_{b_1}$	$-\delta_{c_1}$
γ	9,2	-100	$-\delta_{a_2}$	0

Aus der Tafel ist zu erkennen, daß ein Kraftangriff am einen Ende des Balkens auf den Querschnitt am anderen Ende praktisch keinen Einfluß mehr ausübt, was zur Vereinfachung der Rechnung dienen soll, ebenso sollen der Abkürzung halber mit $\delta_a, \delta_b \ldots \alpha \ldots$ die EJ_R - fachen Beträge der Verschiebungen gemeint sein.

---

19) K. Hayashi: Träger auf elastischer Unterlage (Fußnote 13), Anhang
sowie
Fünfstellige Tafeln der Kreis-und Hyperbelfunktionen usw. Berlin 1921.
Dieselben sieben- und mehrstellig, Berlin 1926.

I. Der einfache Rahmen.

α) Systemwerte.

$2\alpha''' \sim -2\alpha_1$; $\int \eta ds = h(h+\ell)$; $\int ds = 2h+\ell$; damit wird

$$f = \frac{500\ (1680 + 500)}{1000 + 1680 + 796} = 313 \text{ cm}$$

$$\int y^2 ds = \int (\eta - f)^2 ds = \int \eta^2 ds + f^2 \int ds - 2f \int \eta\, ds$$

$$= \frac{2}{3}\, 500^3 + 500^2 \cdot 1680 + 313^2 \cdot 2680$$

$$- 626 \cdot 500 \cdot 2180 = 85 \cdot 10^6.$$

$$\int x^2 ds = \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{\ell}{6} + h\right) = 1100 \cdot 10^6$$

$$\delta a'' \sim \delta a_3 - \frac{\ell}{2}\delta a_1 = 10600000 - 840 \cdot 45850 = -28 \cdot 10^6$$

$$\alpha'' \sim \alpha_3 - \frac{\ell}{2}\alpha_1 = -45850 + 840 \cdot 398 = 0{,}2885 \cdot 10^6$$

Mit der Bezeichnung $N_{(X)}$ = Nenner für die Unbekannte X erhält man

$$N_{(X)} = 85 \cdot 10^6 + 313^2 \cdot 796 = 163 \cdot 10^6$$

$$N_{(Y)} = \left[1100 + 2(-28 + 840 \cdot 0{,}2885)\right] \cdot 10^6 = 1530 \cdot 10^6$$

$$N_{(Z)} = N_{(f)} = 3476$$

β) Belastungswerte.

Um ein möglichst umfassendes Bild von der Beanspruchung der Rahmenkonstruktion zu erhalten, gelangen die wichtigsten Belastungsfälle zur Untersuchung und zwar die Belastungen durch Eigengewicht, des oberen Riegels durch gleichmässig verteilte Verkehrsbelastung und der Seitenstiele durch Erddruck.

1.) Gleichmäßig verteilte Belastung p kg/cm über der rechten Riegelhälfte (Abb.20).

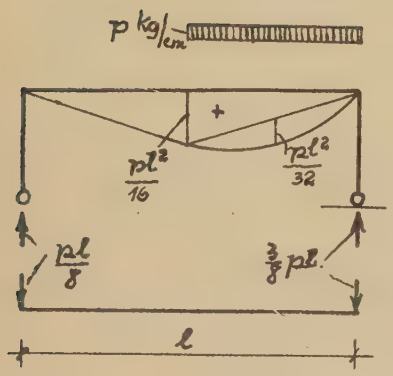


Abb. 20.

$$\int M_o ds = \frac{l}{2} \cdot \frac{pl^2}{16} + \frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{pl^2}{32} = 197 \cdot 10^6 \; p$$

$$\int M_o y ds = (h - f) \cdot \int M_o ds = 36850 \cdot 10^6 \; p$$

$$\int M_o x ds = -\frac{l}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{pl^2}{32} = -20700 \cdot 10^6 \; p$$

$$\alpha_o + \beta_o \sim \left(\frac{pl}{8} + \frac{3}{8}\,pl\right)\alpha_3 = \frac{pl}{2}\,(-45850) = -38{,}5 \cdot 10^6 \; p$$

$$\alpha_o - \beta_o \sim -\frac{pl}{4}\alpha_3 = 19{,}3 \cdot 10^6 \; p$$

$$\delta_a{}^o - \delta_b{}^o \sim -\frac{pl}{4}\delta_{a3} = -420 \cdot 10600000 \; p = -4450 \cdot 10^6 \; p$$

Hiermit lauten die Zähler der Unbekannten

$$Z_{(Xp)} = \left[36850 + 313 \cdot (-38{,}5)\right] \cdot 10^6 p = 24800 \cdot 10^6 \; p$$

$$Z_{(Yp)} = \left[20700 - 4450 + 840 \cdot 19{,}3\right] \cdot 10^6 p = 32450 \cdot 10^6 \; p$$

$$Z_{(Zp)} = \left[-197 - 38{,}5\right] \cdot 10^6 p = -235{,}5 \cdot 10^6 \; p$$

und damit die statisch unbestimmten Größen für die Belastung p halb:

$$Xp = -\frac{24800}{163}\; p = 152 \; p$$

$$Yp = \frac{32450}{1530}\; p = 21{,}2 \; p$$

$$Zp = -\frac{235{,}5 \cdot 10^6}{3476} \cdot p = -67750 \; p$$

Nach den Gleichungen (1) ergeben sich die Lagerkräfte in a und b

A = (210 - 21,2)p =189 p ; B=(630+21,2)p= 651 p

M_a= (152 313 + 21,2·840 - 67750) p = - 2350 p

M_b= (" - " - ") p = - 38000 p

H = 152 p

und nach Gleichung (2) die Momente in den oberen Ecken links (ℓ) und rechts (r):

$M_\ell = (-152 \cdot 187 + 840 \cdot 21{,}2 - 67750)\ p = -78350\ p$

$M_r = (-\ "\ -\ "\ -\ "\ )\ p = -113950\ p$

2) Erddruck beiderseits (Abb. 21.)

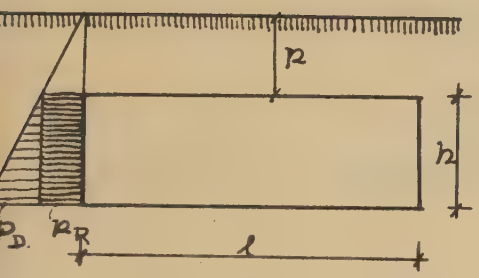


Abb. 21.

Die Belastung des Riegels inkl. Ueberschüttung sei p kg/cm auf 1 m Tiefe des Bauwerks. Die Belastung der Seitenstiele infolge Erddruck tritt hierbei in zwei Teilen auf, einer gleichmäßig verteilten "Rechteck"-Last p_R kg/cm und einer dreieckmäßig verteilten Last mit der maximalen Ordinate p_D kg/cm. Da E max = $\frac{1}{2}\gamma \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2(45 - \frac{\varphi}{2})$, wenn die Reibung zwischen Wand und Erde = 0 gesetzt ist, so wird beispielsweise für $\varphi = 30^\circ$ und $\operatorname{tg}^2(45 - \frac{\varphi}{2}) = 0{,}334$

$$p_D = 0{,}334\ \gamma \cdot h \text{ und } p_R = 0{,}334\ p,$$

wo γ das spezifische Gewicht des Erdbodens ist.

a) Gleichmäßig verteilte Belastung p_R beiderseits.

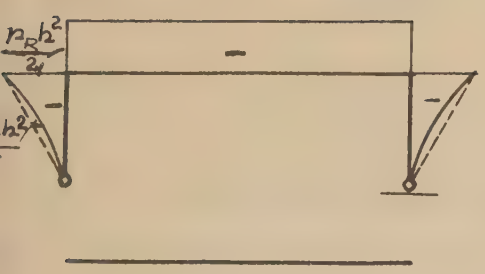


Abb. 22; $M_{o(p_R)}$ = Fl.

Mit der in Abb. 22 dargestellten M_o = Fläche erhält man folgende Werte:

$$\int M_o y\,ds = -2\,\frac{h}{12}\,\frac{p_R h^2}{2}\left[3(h-f) - f\right] - \ell \cdot \frac{p_R h^2}{2}\,(h-f)$$

$$= -41800 \cdot 10^6 p_R$$

$$\int M_o\,ds = -\frac{p_R h^2}{2}\left[\ell + 2\,\frac{h}{3}\right] = -251{,}5 \cdot 10^6\ pR$$

$$\int M_o x\,ds = 0$$

Für die Bodenplatte treten keine Lagerkräfte am M_o = System auf, die Unbekannten erhalten

mithin die Werte:

$$X_{p_R} = - \frac{41800}{163} p_R = - 256\ p_R$$

$$Y_{p_R} = 0$$

$$Z_{p_R} = \frac{251,5 \cdot 10^6}{3476} p_R = 72500\ p_R$$

Hieraus die übrigen Werte:

$A = B = 0$

$$M_a = M_b = (- 256 \cdot 313 + 72500) p_R = - 7630\ p_R$$

$$H = - 256\ p_R$$

$$M_l = M_r = \left(- \frac{500^2}{2} + 256 \cdot 187 + 72500 \right) p_R$$

$$= - 4630\ p_R$$

b) Dreieckförmig verteilte Belastung p_D beiderseits.

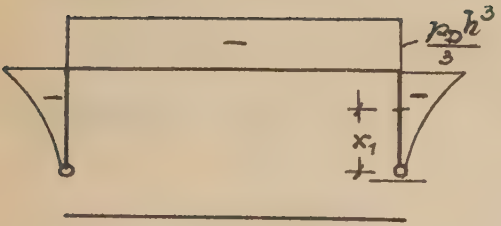


Abb. 23; $M_{o(p_D)} = F.l.$

Die M_o = Fläche für die Stiele ist durch eine kubische Parabel (Abb.23) begrenzt, deren Gleichung lautet:

$$M_o = - \frac{p_D h^2}{2} \left[\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{h} \right)^3 \right]$$; ihr Inhalt ist

$$F = - \int_o^h \frac{p_D h^2}{2} \left[\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{h} \right)^3 \right] dx_1 = - \frac{p_D h^3}{8}$$

Bezeichnet $S_{(x_1=a)}$ das statische Moment dieser Fläche für eine der Auflagerlinie parallel laufende Achse in der Entfernung von $x_1 = a$, so ist

$$S_{(x_1=0)} = - \int_o^h \frac{p_D h^2}{2} \left[\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{h} \right)^3 \right] x_1\ dx_1$$

$$= - \frac{11}{120} p_D h^4$$

und $\int M_o y ds$ (für einen Stiel)

$$= S_{(x_1 = f)} = S_{(x_1 = 0)} - F \cdot f = - \frac{p_D h^3}{8} \left[\frac{11}{15} h - f \right]$$

demnach für den ganzen Rahmen:

$$\int M_o y ds = - (h-f) \ell \frac{p_D h^2}{3} - 2 \frac{p_D h^3}{8} \left[\frac{11}{15} h - f \right]$$

$$= - 27800 \cdot 10^6 \, p_D$$

$$\int M_o ds = - \left[2 \frac{p_D h^3}{8} + \frac{p_D h^2}{3} \ell \right] = - 171 \cdot 10^6 \, p_D \text{ , mithin}$$

$$X_{pD} = - \frac{27800}{163} p_D = - 171 \, p_D$$

$$Y_{pD} = 0$$

$$Z_{pD} = \frac{171 \cdot 10^6}{3476} p_D = 49200 \, p_D$$

$$A = B = 0$$

$$M_a = M_b = - 4320 \, p_D \; ; \; H = - 171 \, p_D \; ;$$

$$M_\ell = M_r = - 2156 \, p_D$$

Zur Berechnung des Einflusses des Eigengewichtes der Stiele dienen folgende beiden Fälle 3u.4.

3) Last P_ℓ am linken Auflager (Abb.24.)

Im statisch bestimmten System erfährt nur die Sohlenplatte eine Beanspruchung durch P_ℓ ; es ist daher

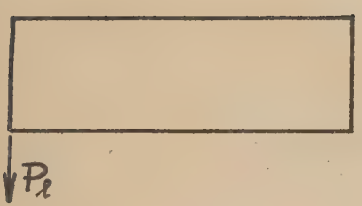


Abb. 24.

$$\alpha_o + \beta_o \sim \alpha_o - \beta_o \sim \alpha_3 P_\ell = - 45850 \, P_\ell \; ;$$

$$f(\alpha_o + \beta_o) = - 14{,}4 \cdot 10^6 \, P_\ell ;$$

$$\frac{\ell}{2}(\alpha_o - \beta_o) = - 38{,}5 \cdot 10^6 \, P_\ell ;$$

$$\delta_a{}^o - \delta_b{}^o \sim \delta_{a_3} P_\ell = 10600000 \, P_\ell \text{ und}$$

$$X_{P_\ell} = - \frac{14{,}4}{163} P_\ell = - 0{,}088 \, P_\ell$$

$$Y_{P_\ell} = \frac{10{,}6 - 38{,}5}{1530} P_\ell = - 0{,}0183 \, P_\ell$$

$$Z_{P_\ell} = - \frac{45850}{3476} P_\ell = - 13{,}15 \, P_\ell$$

$A = (1 + 0{,}0183)P_\ell = 1{,}0183\ P_\ell$; $B = -\ 0{,}0183\ P_\ell$

$M_a = (-0{,}088 \cdot 313 - 0{,}0183 \cdot 840 - 13{,}15)P_\ell = -\ 56{,}1\ P_\ell$

$M_b = (-\ \ " \ \ + \ \ " \ \ - \ \ )P_\ell = -\ 25{,}4\ P_\ell$

$H = -\ 0{,}088\ P_\ell$

$M_\ell = \left[-\ (-0{,}088) \cdot 187 - 0{,}0183 \cdot 840 - 13{,}15\right] P_\ell = -\ 12\ P_\ell$

$M_r = \left[-\ \ " \ \ + \ \ " \ \ - \ \ "\ \right] P_\ell = 18{,}7\ P_\ell$

4) Last P_m in der Mitte der Sohlenplatte (Abb.25)

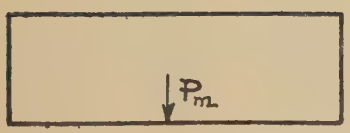


Abb.25.

Der obere Teil des Rahmen-Nullsystems bleibt wieder unbeeinflußt, sodaß sich ergibt

$\alpha_o + \beta_o = 2\alpha_4 \cdot P_m = 962\ P_m$; $f(\alpha_o + \beta_o) = 0{,}303 \cdot 10^6 \cdot P_m$

$\alpha_o - \beta_o = 0$; $\delta_a^{\ o} - \delta_b^{\ o} = 0$

$X_{P_m} = \frac{0{,}303}{163} P_m = 0{,}185 \cdot 10^{-2}\ P_m$

$Y_{P_m} = 0$

$Z_{P_m} = \frac{962}{3476} P_m = 0{,}277\ P_m$

$A = B = 0$; $M_a = M_b = 0{,}854\ P_m$; $H = 0{,}185 \cdot 10^{-2}\ P_m$

$M_\ell = M_r = -\ 0{,}068\ P_m$.

II. Der zweifache Rahmen.

α) Systemwerte.

Zur Ermittelung der Momentenfläche für $U_c = -\ 1$ ist die Berechnung von Y_c erforderlich (Abb.10 und 11). Dabei dient als M_o das in Abb. 15 angegebene $\bar{M}_c$ und für die Sohlenplatte die dort angegebene Belastung. somit wird

$\int Mo \cdot x \cdot ds = \frac{\ell}{2}\left(h + \frac{\ell}{4}\right) = 772800$

$$\delta_a^\circ - \delta_b^\circ = 2\delta_a^\circ \sim 2\left[\tfrac{1}{2}\delta_{a_1} - \delta_{a_2}\right] = 45850 + 3280 = 49130$$

$$\alpha_o - \beta_o = 2\alpha_o \sim 2\left[\tfrac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_2\right] = -398 - 18{,}4 = -416$$

$$\tfrac{\ell}{2}(\alpha_o - \beta_o) = -350000$$

$$Z(Y_c) = -772800 + 49130 - 350000 = 1{,}074\cdot 10^6$$

$$= 1{,}074\cdot 10^6$$

$Y_c = -\frac{1{,}074}{1530} = -0{,}7\cdot 10^{-3}$, und damit für den linken Stiel $M_c^{\ell} = 0{,}5 - 840\cdot 0{,}7\cdot 10^{-3} = -0{,}09$, sodaß man mit $A_c = -Y_c$ die M_c = Fläche wie in Abb. 26 angedeutet erhält.

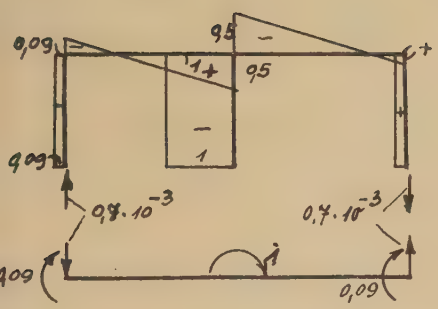


Abb. 26, M_c-Fl.

Gemäß der früheren Vereinbarung handelt es sich in der Folge wieder stets ohne besondere Erwähnung um die $E\cdot J_R$=fachen Beträge der Verschiebungen. Mit der $\bar{M}_d$ = Fläche in Abb. 14. ergibt sich für die Berechnung von t

$$\int M_c \bar{M}_d \frac{J_R}{J}\,ds = -\frac{h^2}{2}\frac{J_R}{J_M} + \frac{h^2}{2}\,0{,}09 - 2\frac{h}{2}\frac{\ell}{4}\,(0{,}5-0{,}09)$$

$$= -290000$$

$$\int M_c \bar{M}_c \frac{J_R}{J}\,ds = h\cdot\frac{J_R}{J_M} + 2\left[-\frac{h}{2}\,0{,}09 + \frac{\ell}{4}\,\frac{1}{2}\,(0{,}5-0{,}09)\right]$$

$$= 988$$

$$\gamma_c = 2(-0{,}09\,\gamma_1 + 0{,}7\cdot 10^{-3}\,\gamma_3) - \gamma_2 = 99{,}5$$

$$\frac{\alpha_c - \beta_c}{2} = \alpha_c \sim -0{,}09\;\alpha_1 + 0{,}7\cdot 10^{-3}\,\alpha_3 - \alpha_2 = -5{,}4$$

$$\gamma_c - \frac{\alpha_c - \beta_c}{2} = 105$$

$$t = -\frac{-290000}{988 + 105} = 265 \text{ cm}$$

Für den Hilfszustand d wird der Zähler Yd

$$Z(Y_d) = -\int M_o x\,ds = -\frac{\ell h}{4}\left(h + \frac{\ell}{2}\right) = -281\cdot 10^6 \text{ und}$$

$$Y_d = \frac{281}{1530} = 0{,}184$$

Das Moment M_d^{ℓ} am Fuße des linken Stieles wird demnach $M_d^{\ell} = 0{,}184\cdot 840 = 155$

Abb. 27.

Die d = Belastung der Sohle ist in Abb. 27. wiedergegeben; hiermit erhält man

$$\gamma_d = 2\,(155\,\gamma_1 - 0{,}184\,\gamma_3) = 2246$$

$$\frac{\alpha_d - \beta_d}{2} = \alpha_d \sim 155\,\alpha_1 - 0{,}184\,\alpha_3 = -\,53500 \text{ und}$$

$$\gamma_d - \frac{\alpha_d - \beta_d}{2} = 55750$$

Durch Vereinigung der t = fachen $\bar{M}_c$ = Fläche mit der $\bar{M}_d$ = Fläche (Abb.14 u.15) erhält man di $\bar{M}_a$ = Fläche, Abb. 28 und aus dieser mit Hilfe der Unbekannten

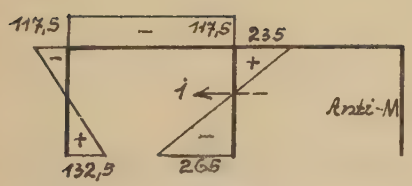


Abb.28, $\overline{Ma}$-Fl.

$$Y_a = Y_d + tY_c = 0{,}184 + 265\,(-\,0{,}7\cdot10^{-3})$$
$$= -\,0{,}212\cdot10^{-2}$$

die M_a = Fläche in Abb. 29 , woraus folgt

$$\int M_a\,\bar{M}_a ds = 46{,}7\cdot10^6$$

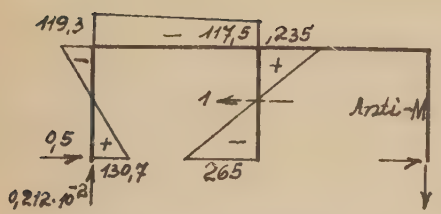


Abb.29, Ma-Fl

Zur Bestimmung der Momentenfläche für $U_b = -1$ dienen nachstehende Werte, wobei als M_o : $\bar{M}_b$ (Abb.16) anzusehen ist.

$$\int M_o y ds = \frac{l^2}{8}\,(h - f) = 66\cdot10^6$$

$$\alpha_o + \beta_o = 2\alpha_o \sim 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_4\right) = -\,45850 - 962 = -\,46800$$

$$f(\alpha_o + \beta_o) = -\,14{,}65\cdot10^6$$

$$\int M_o ds = \frac{l^2}{8} = 352500$$

$$Z_{(X_b)} = (66 - 14{,}65)\cdot10^6 = 51{,}35\cdot10^6$$

$$Z_{(Z_b)} = -\,(352500 + 46800) = -\,399300$$

$$X_b = \frac{51{,}35}{163} = 0{,}315$$

$$Z_b = -\,\frac{399300}{3476} = -\,115$$

Damit wird das Moment am Fuß des linken Stieles ("unten")

$$M_u^{\ell} = 0{,}315 \cdot 313 - 115 = -16{,}5$$

und am Kopf des linken Stieles ("oben")

$$M_o^{\ell} = -0{,}315 \cdot 187 - 115 = -174;$$

hiermit gestaltet sich die M_b= Fläche wie in Abb.30 angegeben, womit sich ergibt

$$\int M_b \bar{M}_b ds = 37{,}4 \cdot 10^6$$

$$\frac{1}{2}(\delta_a^b + \delta_b^b - 2\delta_c^b) = \delta_a^b - \delta_c^b \sim -16{,}5(\delta_{a1} - 2\delta_{c1}) + \frac{\delta_{a3}}{2}$$

$$-2\delta_{c3} + \delta_{c4} = 7{,}67 \cdot 10^6$$

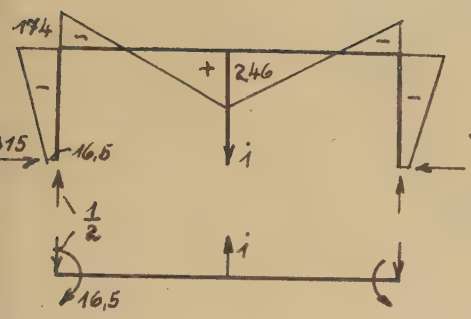


Abb.30, M_b= Fl.

Nunmehr lauten die Nenner der Unbekannten U_{a-c}

$$N_{(U_a)} = 46{,}7 \cdot 10^6 + 265^2 \cdot 105 + 265 \cdot 55750 = 68{,}9 \cdot 10^6$$

$$N_{(U_b)} = (37{,}4 + 7{,}67) \cdot 10^6 = 45{,}07 \cdot 10^6$$

$$N_{(U_c)} = N_{(t)} = 1093$$

) Belastungswerte

1) Gleichm. vert. Last p über der rechten Riegelhälfte.

Die M_o= Fläche, d.h. die Momentenfläche am stat. unbestimmten Hauptsystem, für p rechts folgt aus den früheren Erörterungen und ist in Abb.31 dargestellt. Damit werden

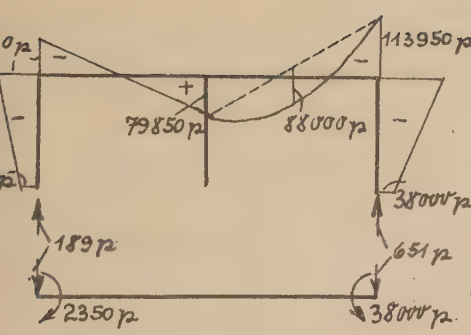


Abb. 31, $M_{o(p)}$= Fl.

$$\int M_o \bar{M}_a ds = 4\,163 \cdot 10^6 \; p$$

$$\int M_o \bar{M}_b ds = 17800 \cdot 10^6 \; p$$

$$\int M_o \bar{M}_c ds = -8{,}2 \cdot 10^6 \; p$$

$$\gamma_o = (35600\,\gamma_1 - 462\,\gamma_3)\,p = -0{,}43 \cdot 10^6 \; p$$

$$\frac{\alpha_o - \beta_o}{2} \sim \frac{1}{2}(-35600\,\alpha_1 + 462\,\alpha_3)p = 3{,}5 \cdot 10^6 \; p$$

$$= -3{,}93 \cdot 10^6 \; p$$

$$\delta_a^{\circ} + \delta_b^{\circ} \sim (840\,\delta_{a3} - 40350\,\delta_{a1})\,p = 7055 \cdot 10^6 \; p$$

$$\delta_c^{\,o} = (840\,\delta_{c3} - 40350\,\delta_{c1})\,p = -187{,}1\cdot10^6\,p$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\delta_a^{\,o} + \delta_b^{\,o} - 2\,\delta_c^{\,o}) = 3715\cdot10^6\,p$$

Hiermit nehmen die Zähler folgende Werte an:

$$Z_{(U_a)} = \left[4163 + 265(-3{,}93)\right]\cdot10^6 p = 3123\cdot10^6\,p$$

$$Z_{(U_b)} = \left[17800 + 3715\right]\cdot10^6\,p = 21515\cdot10^6\,p$$

$$Z_{(U_c)} = (-8{,}2 - 3{,}93)\cdot10^6\,p = -12{,}13\cdot10^6\,p$$

Somit ist

$$U_{a(p)} = \frac{3123}{68{,}9}\,p = 45{,}35\,p$$

$$U_{b(p)} = \frac{21515}{45{,}07}\,p = 477\,p$$

$$U_{c(p)} = -\frac{12{,}13\cdot10^6}{1093}\,p = -11100\,p$$

Mit den Bezeichnungen

$M_u^{\,r}$ = Moment am Fuße des rechten Stieles

$M_o^{\,r}$ = " " Kopf " " "

$M_u^{\,m}$ = " " Fuß " mittleren "

$M_o^{\,m}$ = " " oberen Riegel rechts v.Mittelstiel

M_F = " in Feldmitte des oberen Riegels

C = Auflagerdruck am mittleren Stiel und den früheren Benennungen erhält man

$A = -42\,p$; $C = 477\,p$; $B = 405\,p$

$M_u^{\,\ell} = -1390\,p$; $M_u^{\,m} = 900\,p$; $M_u^{\,r} = -23150\,p$

$M_o^{\,r} = -35360\,p$; M_F (Belastungsfeld)$= 46100\,p$;

$M_o^{\,m}$ (rechts v. Stiel) $= -48200\,p$

Die für den oberen Riegel angegebenen Momente

sollen beim Rahmen mit veränderlicher Sohle zum Vergleiche dienen. Für volle Riegelbelastung wird

$A = B = 363\ p$; $C = 954\ p$; $M_u^{\ell} = M_u^{r} = -24540\ p$; $M_u^{m} = 0$.

Mit Hilfe dieser Werte und der in Abschnitt C I c aufgeführten Gleichungen für die Senkungen und Momente der Sohlenplatte sind in Abb.32 bis 35 die Senkungs - und Momentenkurven für die Sohle aufgezeichnet. Man erkennt, daß bei einseitiger Riegelbelastung am entgegengesetzten Sohlenende negative Bodenpressungen auftreten, die ein Abheben der Platte vom Boden zur Folge haben würden, wenn nicht, wie eingangs erwähnt ist und später nachgewiesen wird, das Eigengewicht des Bauwerkes dies verhindern würde. Bei voller Riegelbelastung sind nur noch positive Senkungen vorhanden. Die Momentenfläche für volle Belastung hat die Gestalt derjenigen des durchlaufenden Trägers auf festen Einzelstützen. Sie unterscheidet sich von der letzteren durch die starke Abflachung in den Feldern.

2) Erddruck beiderseits.

a) Gleichm. verteilte Last p_R beiderseits. Die Momentenfläche am Nullsystem gibt die Abb. 36 wieder. Wegen der Symmetrie in der Belastung werden

$\int M_o \bar{M}_a ds$ und $\int M_o \bar{M}_c ds = 0$, ferner $\gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2} = 0$ und

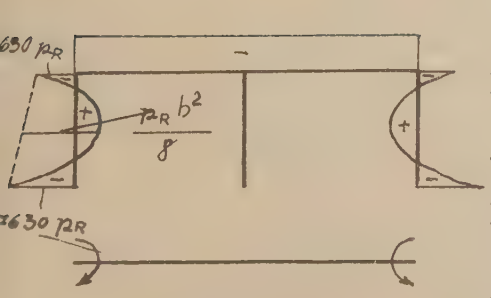


Abb. 36, $M_{o(p_R)}$ = Fl.

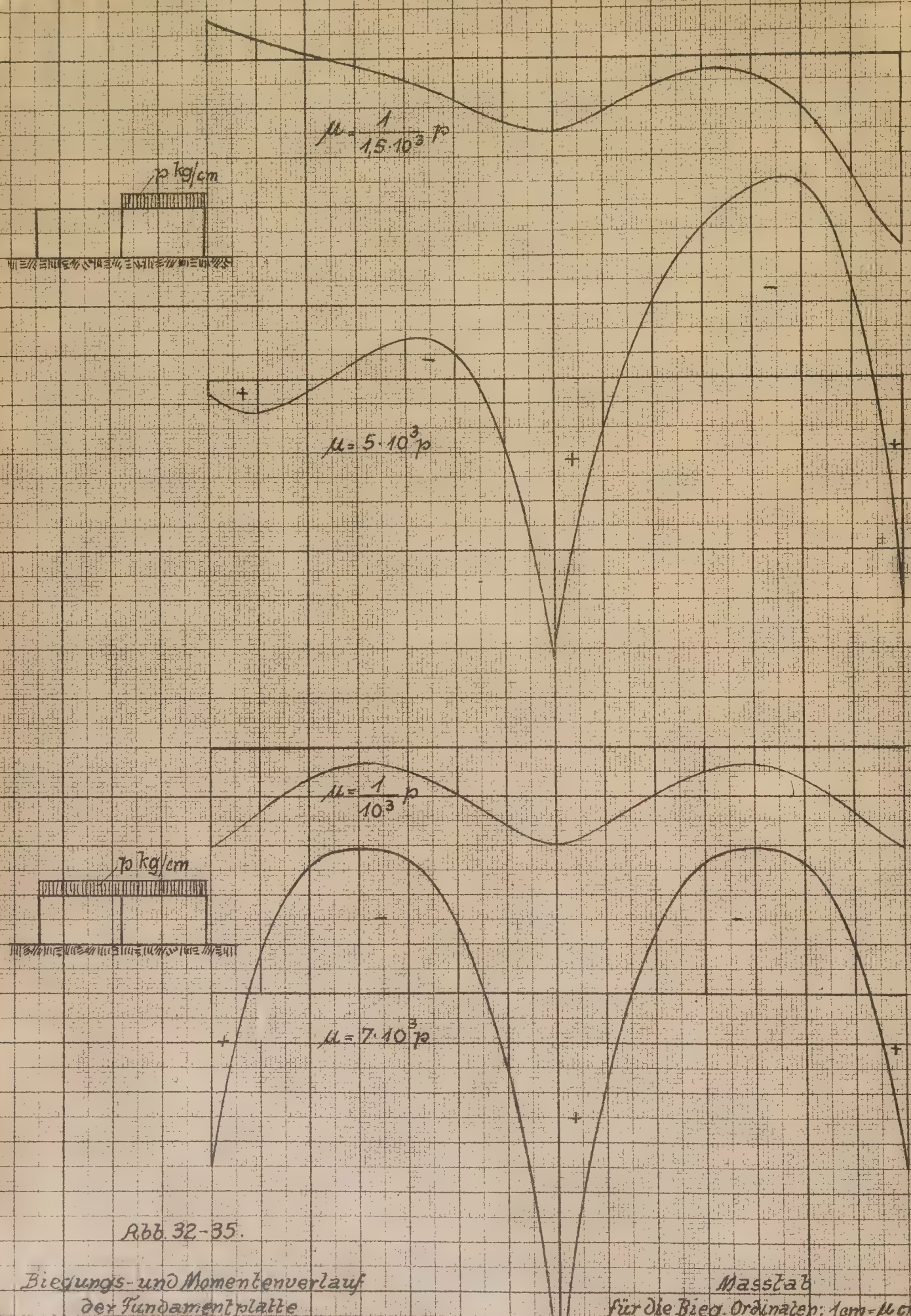


Abb. 32-35.

Biegungs- und Momentenverlauf
der Fundamentplatte
unveränderlichen Querschnitts
für rechtsseitige bezw. volle Riegellast.

Massstab
für die Bieg. Ordinaten: 1cm = μ cm
" " Mom. " : 1cm = μ cmkg

$$\int M_o \bar{M}_b ds = - 1634 \cdot 10^6 \; p_R$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta_a^o + \delta_b^o - 2\delta_c^o) = \delta_a^o - \delta_c^o \sim - 7630 p_R (\delta_{a_1} - \delta_{c_1}) = - 356 \cdot 10^6 \; p_R$$

$$U_{a(p_R)} = U_{c(p_R)} = 0; \; U_{b(p_R)} = - 44{,}1 \; p_R$$

$$A = B = 22{,}05 \; p_R \; ; \; C = - 44{,}1 \; p_R \; ; M_o^r = -12\,300 \; p_R$$

$$M_F = - 3\,040 \; "$$

$$M_u^l = M_u^r = - 8357 \; p_R \; ; \; M_u^m = 0 \qquad M_o^m = 6\,220 \; "$$

Die Senkungs- und Momentenkurven sind in Abb.37 u. 38 dargestellt.

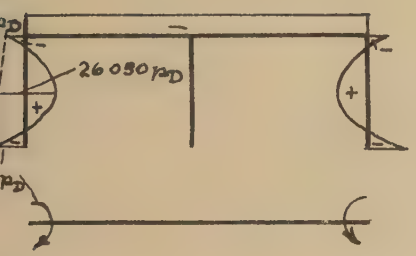


Abb.39, $M_o(p_D) = Fl$

b) Dreieckförmig verteilte Last p_D beiderseits.

Aus der M_o= Fläche in Abb.39 folgt

$$\int M_o \bar{M}_b ds = - 761 \cdot 10^6 \; p_D$$

$$\tfrac{1}{2} (\delta_a^o + \delta_b^o - 2 \delta_c^o) = - 201{,}7 \cdot 10^6 \; p_D$$

$$U_b (p_D) = - 21{,}3 \; p_D \quad \text{und}$$

$$A = B = 10{,}65 \; p_D \; ; \; C = - 21{,}3 \; p_D ; \; M_u^l = M_u^r = - 4670 \; p_D$$

Die Kurven der Sohle geben die Abb. 40 u. 41 wieder.

3) Last P_l am linken Stiel (Abb.42)

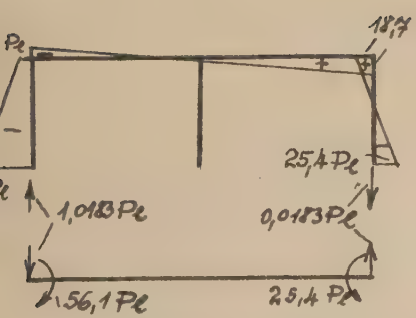


Abb. 42, $M_o(P_l) = Fl.$

$$\int M_o \bar{M}_a ds = 1{,}405 \cdot 10^6 \; P_l$$

$$\int M_o \bar{M}_b ds = 1{,}18 \cdot 10^6 \; P_l$$

$$\int M_o \bar{M}_c ds = - 14150 \; P_l$$

$$\gamma_o = (-30{,}7 \gamma_1 + 1{,}0366 \gamma_3) P_l = 1417 \; P_l$$

$$\frac{\alpha_o - \beta_o}{2} \sim \tfrac{1}{2} (30{,}7 \alpha_1 - 1{,}0366 \alpha_3) P_l$$

$$= - 17690 \; P_l$$

$$\gamma_o - \frac{\alpha_o - \beta_o}{2} = 0{,}0191 \cdot 10^6 \; P_l$$

$$\delta_a^o + \delta_b^o \sim \delta_{a3} - 81{,}5 \; \delta_{a1} = 6{,}87 \cdot 10^6 \; P_l$$

$$\delta_c^o = \delta_{c3} - 81{,}5 \; \delta_{c1} = - 0{,}207 \cdot 10^6 \; P_l$$

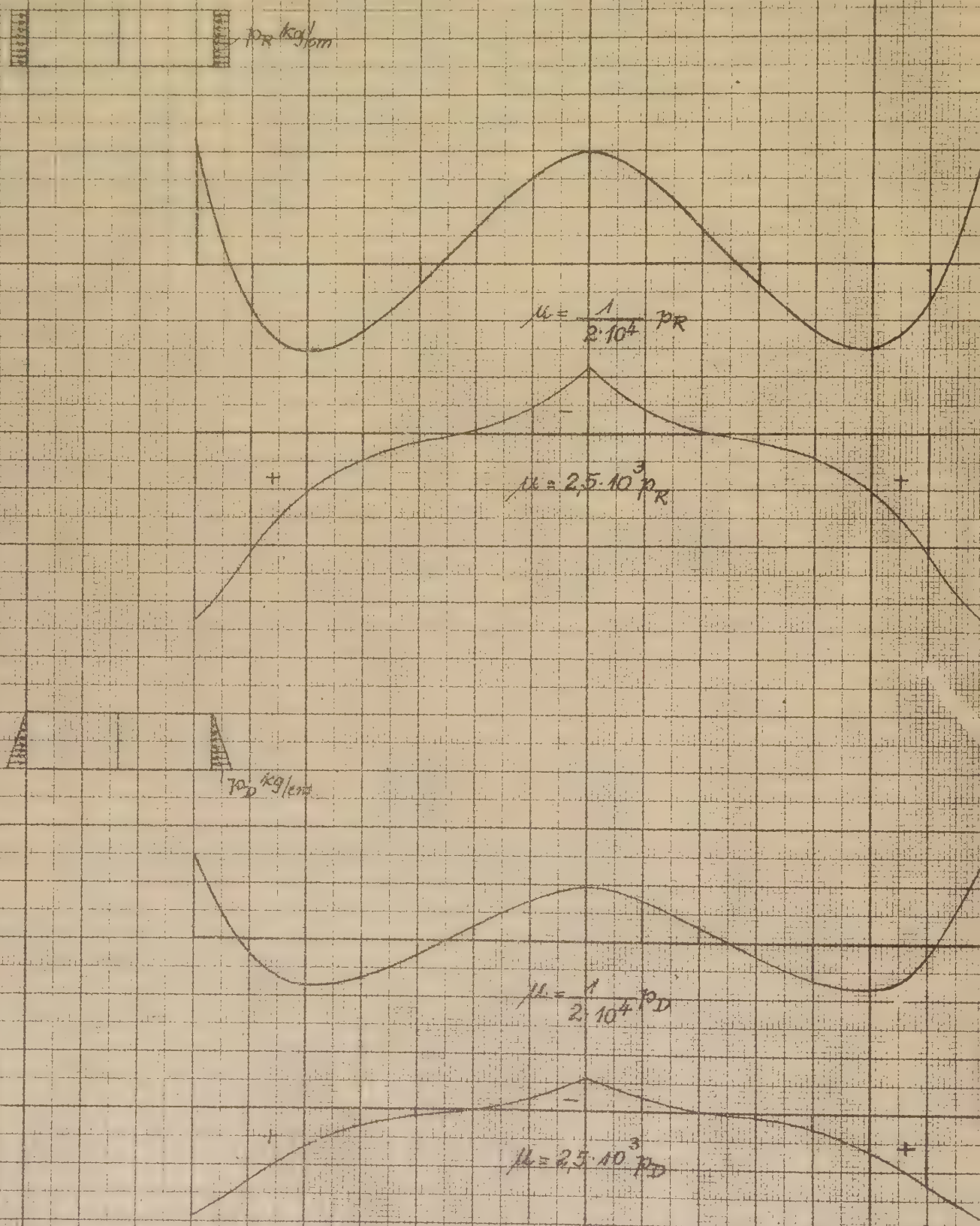


Abb. 37, 38 u. 40, 41.

Biegungs- und Momentenverlauf
der Fundamentplatte unveränderlichen Querschnitts
für gleich- bezw. dreiecksmässig verteilte
Seitenlast.

Massstab
für die Bieg. Ordinaten: 1cm = μ cm
" " Mom. " : 1cm = μ cm

$$\frac{1}{2}\left(\delta_a^{\,o} + \delta_b^{\,o} - 2\,\delta_c^{\,o}\right) = 3{,}64\cdot 10^{6}\ P_\ell$$

$$U_a = \frac{-1{,}405 + 265\cdot 0{,}0191}{68{,}9}\ P_\ell = 0{,}094\ P_\ell$$

$$U_b = \frac{-1{,}18 + 3{,}64}{45{,}07}\ P_\ell = 0{,}107\ P_\ell$$

$$U_c = \frac{-14150 + 19110}{1093}\ P_\ell = 4{,}54\ P_\ell$$

$A = 0{,}961\ P_\ell$; $B = -\,0{,}0684\ P_\ell$; $C = 0{,}107\ P_\ell$;

$M_u^{\ell} = -\,66{,}19\ P_\ell$; $M_u^{\,r} = -\,11{,}77\ P_\ell$;

$M_u^{\,m} = 29{,}44\ P_\ell$.

Senkungs- und Momentenkurve der Sohle für $P_\ell = 1$ siehe Abb. 43 u. 44. Die Untersuchung für P als Eigengewichtsbelastung wäre einfacher durch einen symmetrischen Belastungsfall erfolgt. Die einseitige Lastannahme wurde durchgeführt, um gleichzeitig über den Einfluß eines eventuell an den Enden der Sohle angebrachten Zugankers zur Beseitigung negativer Bodenpressungen Aufschluß zu erhalten. Wie die Senkungskurve erkennen läßt, ist die Verhinderung solcher Boden-Zugbeanspruchungen durch Verankerung auf eine ausgedehnte Strecke möglich.

4) P_m am mittleren Stiel.

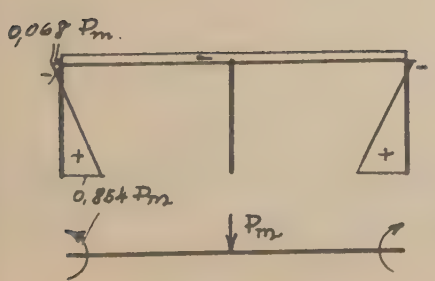


Abb. 45, $M_o(P_m)$-Fl.

Infolge der symmetrischen M_o= Fläche (Abb.45) werden U_a und $U_c = 0$ und

$$\int M_o\,\bar{M}_b\,ds = -\,0{,}024\cdot 10^{6}\ P_m\ ,$$

$$\frac{1}{2}\left(\delta_a^{\,o} + \delta_b^{\,o} - 2\,\delta_c^{\,o}\right) = \delta_a^{\,o} - \delta_c^{\,o} \sim$$

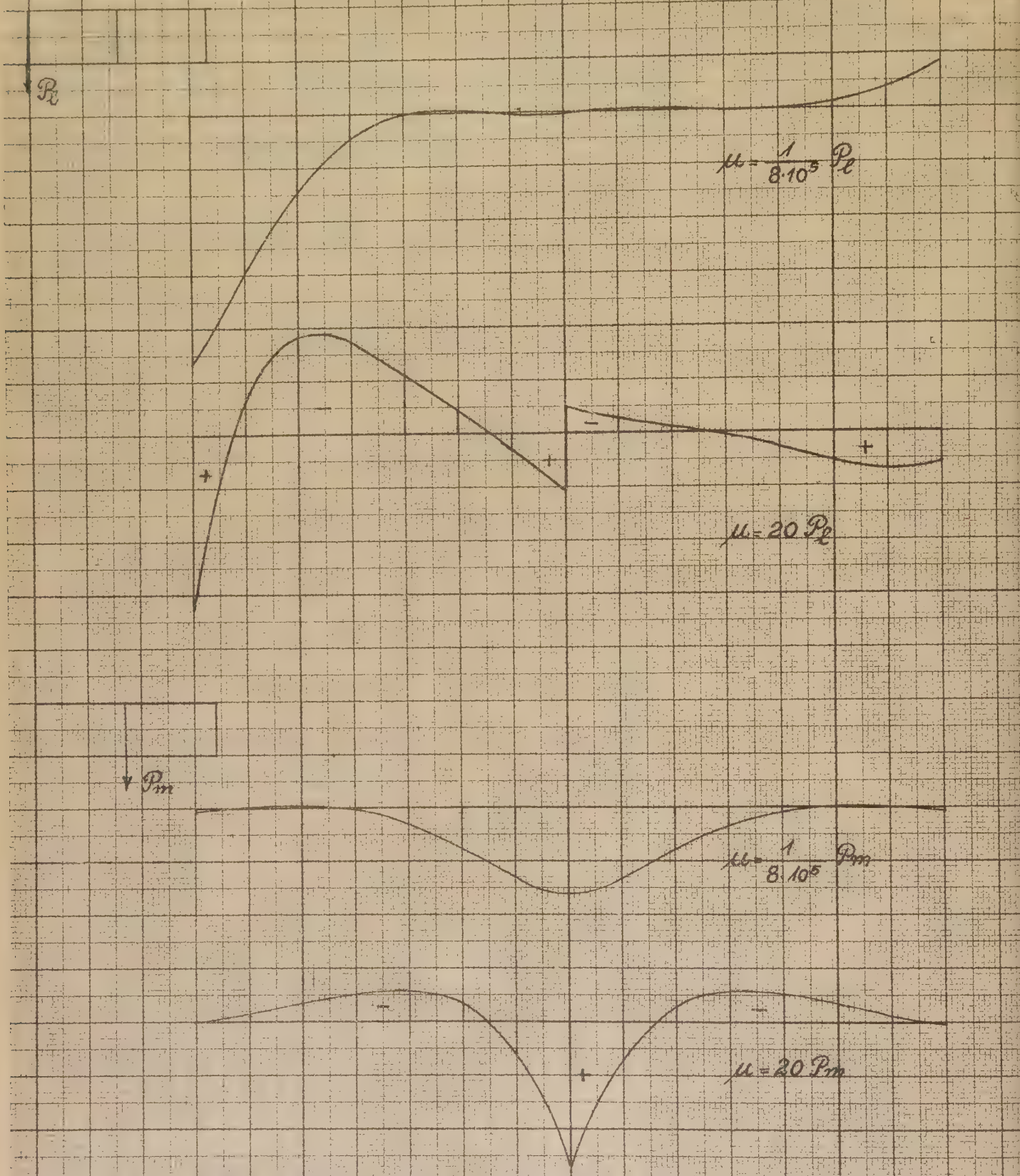


Abb. 43,44 u. 46,47.

Biegungs- und Momentenverlauf
der Fundamentplatte unveränderlichen Querschnitts
für Einzellast P am linken bezw. mittleren
Knotenpunkt.

Masstab
für die Bieg. Ordinaten: 1cm - μ cm
" " Mom. " : 1cm - μ cmkg

$$\sim\left[0{,}854\ (\delta a_1-\delta c_1)+\delta a_4-\delta c_4\right] P_m = -\ 2{,}856\cdot 10^6\ P_m$$

$$U_b = -\ \frac{0{,}024 + 2{,}856}{45{,}07}\ P_m = -\ 0{,}064\ P_m$$

$A = B = 0{,}032\ P_m$; $C = 0{,}936\ P_m$; $M_u^{\ell r} = (0{,}854-1{,}05)\ P_m$ $= -\ 0{,}196\ P_m$; Senkungs-und Momentenkurve der Sohle siehe Abb. 46 u. 47.

Zur Ermittelung der ungünstigsten Belastung für die Sohlenplatte folgt eine Zusammenstellung der maximalen Biegungsmomente der Sohle. Dabei ist unter M_m^{ℓ} das Moment in der Mitte links vom Stiel verstanden, unter M^{ℓ} das Moment an der linken Ecke u.s.w. und das größte Feldmoment bei $0{,}18\,\ell$ vom Ende angenommen.

Maximale Biegungsmomente an der Sohlenplatte mit gleichbleibendem Trägheitsmoment.

	Knotenmomente				Feldmomente	
infolge (p in kg/cm)	M^{ℓ}	M^{r}	M_m^{ℓ}	M_m^{r}	$M_{0{,}18\ell\ \text{v.links}}^{\ell}$	$M_{0{,}18\ell\ \text{v.rechts}}^{r}$
p rechts	1390 p	23150 p	28070 p	27170 p	- 500 p	- 20000 p
p voll	24540 p		55240 p		-21000 p	
p_R	8357 p_R		-3000 p_R		1750 p_R	
p_D	4670 p_D		-1494 p_D		1150 p_D	
$p_{\ell,r}$	7796 $p_{\ell,r}$		11,90 $p_{\ell,r}$		-30,05 $p_{\ell,r}$	
p_m	0,196 p_m		54,12 p_m		- 8,43 p_m	

Für alle Querschnitte der Sohle kommt die volle Riegelbelastung in Frage. Für die Berechnung der Momente bei gleichzeitigem Auftreten aller genannten Belastungen werden beispielsweise folgende Annahmen gemacht:

Nutzlast inkl. Ueberschüttung $p = 10^t/m^2 = 100$ kg/cm für $h = 5{,}0$ m und $\gamma_g = 1{,}6^t/m^3$ ist $p_D = 27$ kg/cm $= 0{,}27\ p$ und $p_R = 0{,}334\ p$.

Eigengewicht:

Riegel und Seitenstiele, für $h = 90$ cm und $\gamma_{Beton} = 2{,}4^t/m^3$ ist $g = 2{,}15^t/m^2 = 0{,}215\ p$;

Mittelstiel, $h = 75$ cm, $g = 1{,}8^t/m^2 = 0{,}18\ p$;

demnach ist die Auflast vom Gewicht der Seitenstiele

$P_\ell = P_r = 500 \cdot 0{,}215\ p = 107{,}5\ p$

und vom Gewicht des Mittelstieles

$$P_m = 500 \cdot 0{,}18\ p = 90\ p$$

Damit nehmen die Größtmomente für Gesamtbelastung folgende Werte an:

Größtmomente infolge Vollbelastung.

	Knotenmomente		Feldmomente
infolge	$M^\ell = M^r$	$M_m^\ell = M_m^r$	$M_\ell = M_r$
p voll	24540 p	55240 p	- 21000 p
p_R	2790 p	-1000 p	590 p
p_D	1260 p	- 400 p	310 p
g(Riegel)	5290 p	11900 p	- 4500 p
$P_{\ell,r}$	8370 p	1280 p	- 3230 p
P_m	20 p	4890 p	- 760 p
max M	42300 p	71900 p	- 28600 p

Mit der Voraussetzung einer möglichen Erddruckbelastung wäre streng genommen notwendig gewesen, auch bei den Seitenstielen eine, wenn auch nur beschränkt geltende elastische Lagerung vorauszusetzen. Denn ist auch der Einfluß des Erddruckes auf die Sohlenplatte infolge der langgestreckt gewälten Form des Bauwerkes gering gegenüber demjenigen der senkrecht wirkenden Lasten, so hat dies nicht zu bedeuten, daß die an den Seitenstielen angreifenden elastischen Kräfte eine gleich geringe Wirkung auf die Fundamentplatte ausüben, da die Größe dieser Kräfte als unabhängig von der Größe des aktiven Erddruckes anzusehen ist. Die elastische Lagerung der Seitenstiele bei der Berechnung des Systems zu berücksichtigen, ist auf dem eingeschlagenen Wege ohne besondere Schwierigkeiten möglich, z.B. durch Einführung des oberhalb der Fundamentplatte befindlichen Rahmenteiles als statisch unbestimmten Hauptsystems. Bei der vorliegenden Aufgabe unterblieb diese Berücksichtigung, da die Wirkung der elastischen Zusatzkräfte auf die Fundamentplatte von gleicher Art wie diejenige der Erddruckkräfte ist.

Zur Frage, ob an den Enden der Sohle Zugspannungen zwischen Boden und Platte auftreten, werden für die einzelnen Belastungen mit Hilfe der Senkungskurven die senkrechten Verschiebungen am linken Eckpunkt angegeben.

Man erhält

infolge g = 0,215 p : y = $0{,}204 \cdot 10^{-2} = 0{,}215\ p = 0{,}44 \cdot 10^{-3}\ p$

" $P_{\ell,r}$ = 107,5 " " = $0{,}483 \cdot 10^{-5} \cdot 107{,}5\ p = 0.52 \cdot$ " "

" P_m = 90 " " = $0{,}83\ 10^{-7} \cdot 90\ p = 0{,}0075$ " "

Gesamtsenkung infolge Eigengewicht: = $0{,}97 \cdot 10^{-3}\ p$

infolge p rechts : y = $= -\ 0{,}515 \cdot 10^{-3}\ p$

" p_R = 0,334 p: y = $-\ 0{,}114 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}334\ p = -\ 0{,}038 \cdot$ " "

" p_D = 0,27 p: " = $-0{,}0784 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}27\ p = -\ 0{,}021$ " "

Gesamthebung: = $0{,}574 \cdot 10^{-3}\ p$

Die Zugspannungen werden also durch das eigene Gewicht des Bauwerkes überwunden, ein Abheben der Sohle vom Boden tritt demnach nicht auf.

Die Stärke der Sohlenplatte reicht für die Höchstbelastung nicht durchweg aus. Wohl werden die Schubspannungen vom Querschnitt 75/100 cm aufgenommen , denn ihr Maximum , das am mittleren Stiel auftritt, beträgt $\tau_m \sim$ 9,5 kg/cm ^{2} . Auch in den Feldern und am linken Auflager reicht die Höhe der Platte aus, denn es ist die erforderliche nutzbare Höhe h für σ_b = 40 kg/cm ^{2} , σ_e = 1200 kg/cm^2 und p = 100 kg/cm

$h = 13 \sqrt{28{,}6^t} = 69{,}5$ cm u. $h_{\ell,r} = 10{,}9 \sqrt{42{,}3^t} = 71$ cm,

wenn man in den Ecken σ_b = 50 und σ_e = 1200 kg/cm^2 zuläßt. Jedoch am mittleren Auflager ist für diese zulässigen Spannungen

$$h_m = 10{,}9 \sqrt{71{,}9^t} = 92{,}5 \text{ cm.}$$

Hier ist also eine erhebliche Verstärkung der Sohlenplatte notwendig. Mit Rücksicht auf den hohen

Wert der Schubspannungen in den äußeren Ecken von $\tau_{a,b} \sim 9$ kg/cm^2 wird man zweckmäßig die Sohle auch an ihren Enden verstärken. Die Folge ist eine Grundplatte von veränderlichem Querschnitt. Der Einfluß ihrer Veränderlichkeit soll im folgenden II. Teil untersucht werden.

C II. Der Rahmen mit veränderlicher Fundamentplatte.

a) Ergebnisse der Anwendung des bisherigen graphischen Verfahrens und seine Divergenz.

Zur Ermittelung der in den Gleichungen für die statisch unbestimmten Größen enthaltenen Formänderungen der Grundplatte veränderlichen Querschnitts für die spezifischen Belastungsfälle wurde probeweise das bisherige graphische Näherungsverfahren angewandt. Es besteht darin, daß für die Durchbiegung y zunächst eine Funktion y_o und damit eine Lastverteilung Cy_o angenommen wird, zu deren Momentenfläche mit den erweiterten Ordinaten $M\left(\frac{J_c}{J}\right)$ als Lastfläche die gesuchte Funktion y als Seilkurve erhalten wird. Sie bildet die Grundlage für eine Wiederholung der Untersuchung, die solange zu erfolgen hat, bis die Ordinaten der vorhergehenden Belastungsfläche mit dem mit C erweiterten Ergebnis y übereinstimmen. Zur Abkürzung der Untersuchung und betreffs des Ergebnisses erwähnt Föppl in seinen " Vorlesungen " [8] folgendes: " Im allgemeinen wird man zunächst eine starke Abweichung in der Gestalt beider Kurven finden. Dann ändert man die zuerst gezeichnete Belastungsfläche so ab, daß sich die Lastverteilung jetzt mehr der Gestalt der gefundenen elastischen Linie nähert, und wiederholt das Ver-

fahren für diese zweite Annahme. Die Uebereinstimmung zwischen Belastungsfläche und zugehöriger elastischer Linie wird jetzt besser werden und nach mehrmaliger Wiederholung findet man mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Druckverteilung. "

Zur Untersuchung gelangt der symmetrische Belastungsfall einer Einzellast in der Mitte der Fundamentplatte (Spezifischer Belastungsfall 4), deren Querschnittshöhe sich der Einfachheit halber sprungweise nach Abb. 48 ändern möge. Für die Durchführung der Untersuchung wurde die numerische Integration gewählt, wobei die halbe Balkenlänge l in 7 gleiche Teile Δ eingeteilt und zur genaueren Ermittelung der Gewichte die Formel von Professor Mann angewandt wurde,

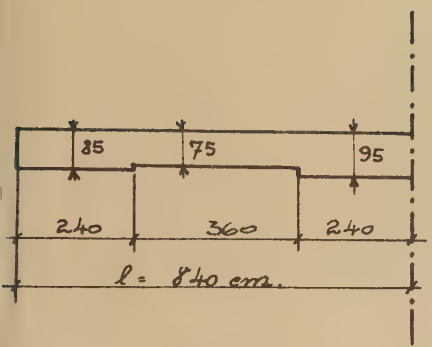


Abb. 48.

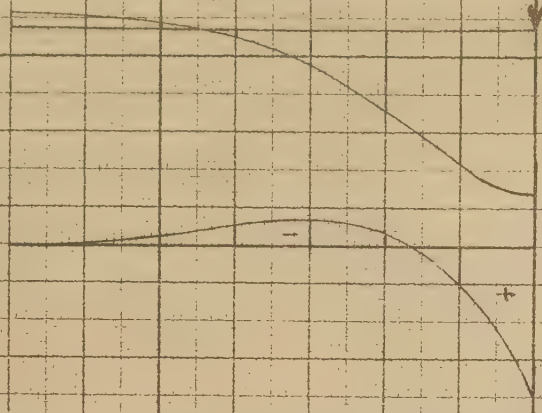
$$W_r = (z_{r-1} + 10\, z_r + z_{r+1})\, \frac{\Delta}{12}. \quad 20)$$

Die mit $-\frac{J_c}{J}$ verzerrte Momentenfläche liefert als Lastfläche die erste "genäherte" Biegungslinie, die mit Hilfe der zugehörigen, wiederum mit $-\frac{J_c}{J}$ erweiterten 2.Momentenfläche die 2. "genäherte" Biegungslinie erzeugt u.s.f. Die Ergebnisse sind maßstäblich in den Abb. 49 - 56 dargestellt. Schon die Form der einzelnen Kurven läßt eine Annäherung an die gesuchte, die von derjenigen

---

20) L. Mann: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage , J. Springer 1927 S. 48.

$P = 1$

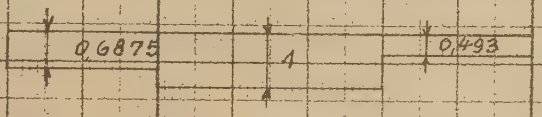


Biegungslinie für unveränderliche Plattenstärke $h = 75$ cm

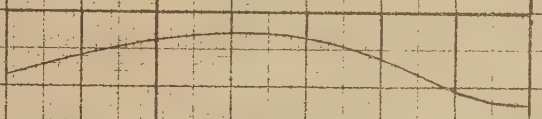
$\mu = \frac{1}{10^6}$

Momentenlinie für unveränd. Pl. St.

$\mu = 30$

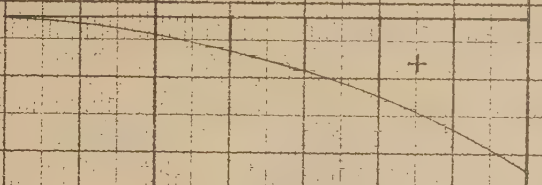


$\frac{J_0}{J}$ = Fläche



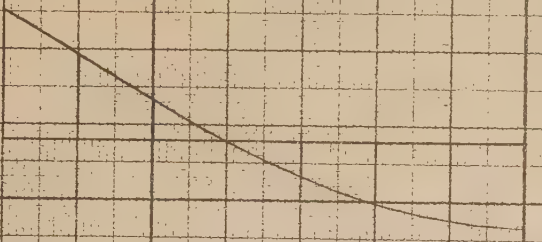
1. „genäherte" Biegungslinie

$\mu = \frac{1}{10^6}$



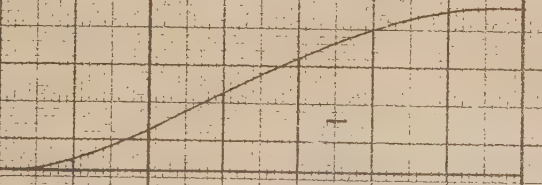
1. „genäherte" Momentenlinie

$\mu = 90$



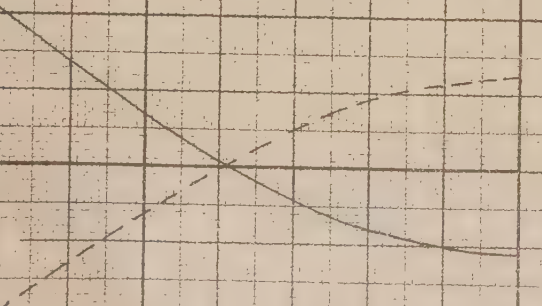
2. „genäherte" Biegungslinie

$\mu = \frac{1}{10^5}$



2. „genäherte" Momentenlinie

$\mu = 700$



(- - - Dem Vorzeichen entsprechender Verlauf.)

3. „genäherte" Biegungslinie

$\mu = \frac{1}{2 \cdot 10^3}$

Abb. 49 - 56.

für unveränderliche Stärke aufgetragenen Biegungslinie nicht erheblich abweichen kann, vermissen. Die beigefügten Multiplikatoren μ geben die starke Divergenz dieses Verfahrens wieder, das sich damit für die vorliegende Aufgabe als unbrauchbar erwiesen hat.

Geht man, um den Grund für die Divergenz des Verfahrens zu ermitteln, für den vorbehandelten Belastungsfall bei der Platte mit unveränderlichem Querschnitt von einer gleichmäßig verteilten Bodenbeanspruchung Cy_o als erster angenäherter Lastfunktion aus und entwickelt auf analytischem Wege durch jedesmalige vierfache Integration die 1.2.3. u.s.f. Biegungslinie, so stellt sich bei konstant gehaltenem y_o unter der Last die an irgend einer Stelle x vom Lastangriffspunkt aus eintretende endgültige Durchbiegung y in einer Reihe von folgender Form dar

$$y = y_o \left[1 - \alpha \cdot f_1(u) + \alpha^2 \cdot f_2(u) - \alpha^3 \cdot f_3(u) + \ldots\ldots\ldots \right] = y_o \cdot F(u, \alpha) \ldots\ldots\ldots 1)$$

Die Funktionen f (u), wo $u = \frac{x}{\ell}$, sind echte Zahlenbrüche, die stetig kleiner werden. Sie sind nur von den Grenzbedingungen, d.h. von der Belastungsart abhängig, haben daher keinen grundsätzlichen Einfluß auf das Verhalten der Reihe. Für die Konvergenz der Reihe ist der Wert $\alpha = \frac{C\ell^4}{EJ}$ maßgebend. Er kann so klein sein, daß die Reihe bereits mit den ersten Gliedern und damit auch das graphische

Näherungsverfahren mit den ersten Wiederholungen genügend konvergiert. Mit wachsendem α wird die Entwickelung divergent. Das letztere ist bei der vorliegenden Fundamentplatte der Fall.

b) Darlegung des konvergenten Rechnungsganges.

Zur Vermeidung der Divergenz des geschilderten graphischen Verfahrens weist Herr Professor Mann darauf hin, durch Teilung des Balkens in einzelne Abschnitte die Spannweite auf ein der Konvergenz entsprechendes Maß herabzudrücken. Da durch diese Maßnahme außer den Biegungsordinaten in den Teilpunkten auch die dort auftretenden Biegungsmomente (Abb.57) zur endgültigen Durchbiegung y beitragen, steht für jeden Abschnitt eine Gleichung für y mit den 4 Unbekannten y_{r-1}, y_r, M_{r-1}, und M_r zur Verfügung von der Form

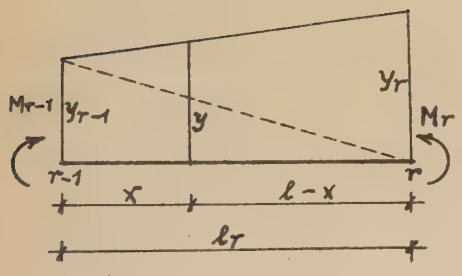


Abb. 57

$$y = A \cdot y_{r-1} + B \cdot y_r + D \cdot M_{r-1} + F \cdot M_r \quad \ldots \quad (2)$$

Die Koeffizienten A – F sind entsprechend Gleichung (1) wieder durch Reihenfunktionen $F(u, \alpha)$ gegeben, die für die dreieckförmigen Ausgangsbelastungen $y_{r-1} = 1$, $y_r = 1$, $M_{r-1} = 1$ und $M_r = 1$ eines einfachen Balkens von der Spannweite l_r für gleichbleibendes Trägheitsmoment J_c auf die besprochene Art gefunden werden. Die Ermittelung der Unbekannten erfolgt durch Gleichsetzung der Tangenten und Querkräfte in den Abschnittspunkten und durch Erfüllung der vier Grenzbedingungen an

an den Enden des Balkens. Bei n=Abschnitten erhält man somit 2(n+1) Gleichungen, denen bei (n-1) Teil-Punkten 2(n-1) + 4 = 2(n+1) bekannte Bedingungen gegenüberstehen.

Die Tangenten und Querkräfte leiten sich aus Gleichung (2) ab; sie sind durch folgende Beziehungen verhältnisgleich dargestellt

$$\frac{dy}{du}_{(u=o)} = A_o' y_{r-1} + B_o' y_r + D_o' M_{r-1} + F_o' M_r$$

$$\frac{dy}{du}_{(u=1)} = A_1' y_{r-1} + B_1' y_r + D_1' M_{r-1} + F_1' M_r$$

$$\frac{d^3y}{du^3}_{(u=0)} = A_o''' y_{r-1} + B_o''' y_r + D_o''' M_{r-1} + F_o''' M_r$$

$$\frac{d^3y}{du^3}_{(u=1)} = A_1''' y_{r-1} + B_1''' y_r + D_1''' M_{r-1} + F_1''' M_r$$

Die Funktionen $A^{',''}$ bis $F^{',''}$ sind nach Herrn Professor Mann durch folgende Ausdrücke bestimmt, wobei $\frac{\ell_r^2}{EJ_c} = \varepsilon$ gesetzt ist:

$$B_o' = -A_1' = 1 - 6\,(a_2\cdot\alpha - a_4\cdot\alpha^2 + a_6\cdot\alpha^3 - \ldots\ldots)$$

$$B_1' = -A_o' = 1 + 2\,b_2\cdot\alpha - b_4\cdot\alpha^2 + b_6\cdot\alpha^3 - \ldots\ldots)$$

$$F_o' = -D_1' = \varepsilon\cdot 6\,(a_1 - a_3\cdot\alpha + a_5\cdot\alpha^2 - a_7\cdot\alpha^3 + \ldots\ldots)$$

$$F_1' = -D_o' = -\varepsilon\cdot 2(b_1 - b_3\cdot\alpha + b_5\cdot\alpha^2 - b_7\cdot\alpha^3 + \ldots\ldots)$$

$$B_o''' = -A_1''' = \frac{1}{\varepsilon}\,\alpha\cdot F_o' \qquad F_o''' = -D_1''' = -\varepsilon\cdot B_o'$$

$$B_1''' = -A_o''' = \frac{1}{\varepsilon}\,\alpha\cdot F_1' \qquad F_1''' = -D_o''' = -\varepsilon\cdot B_1'$$

Die festen Koeffizienten $a_{1,2,\ldots n}$ und $b_{1,2,\ldots n}$ sind in folgender Tabelle bis zum 9. Glied wiedergegeben:

	a	b
1	0,027 777 8	0,166 667
2	0,003 240 74	0,011 111 1
3	0,000 341 711	0,001 058 20
4	0,000 034 997 8	0,000 105 820
5	0,000 003 556 01	0,000 010 688 9
6	0,000 000 360 558	0,000 001 082 20
7	0,000 000 036 538 8	0,000 000 109 630
8	0,000 000 003 702 32	0,000 000 011 108 0
9	0,000 000 000 375 128	0,000 000 001 125 39

Für veränderliches Trägheitsmoment lassen sich die Funktionen mit Hilfe numerischer Intregation ermitteln und zwar stellen die Werte A_o' , A_1' , B_o' ..... die Tangenten in den Auflagerpunkten an die elastische Linie des Balkens $\ell_r = 1$ dar, die gebildet werden aus der Summe der Tangenten der Grundbelastungslinie für y_{r-1} bezw. $y_r=1$ und der mit abwechselndem Vorzeichen versehenen Tangenten an die aus der Grundsen - kungslinie bezw. aus der Grund-Momentenlinie für M_{r-1} bezw. $M_r=1$ entwickelten "korrigierenden" Senkungslinien. Die "korrigierenden" Tangenten sind durch die Auflagerdrücke des jeweils mit den den einzelnen Senkungslinien zugehörigen, durch $\frac{Jc}{J}$ reduzierten

Momentenflächen belasteten Balkens ℓ_r gegeben.

Die Werte A_o'' , A_1'''.... bestimmen sich aus den jeweiligen Auflagerkräften des Balkens ℓ_r=1, der von der Grundbelastung y_{r-1} , bezw. y_r = 1 und den korrigierenden Belastungen ,bei D''' und F'' von letzteren allein, beansprucht wird.

c) <u>Abmessungen der Fundamentplatte und Entwickelung der Teilgleichungen.</u>

Die Platte aus dem behandelten Rahmenbeispiel soll entsprechend Abb.58 an den Knotenpunkten auf d = 102 cm verstärkt werden. Der Anlauf der Platte beginne in den Drittelspunkten der Plattenhälfte und möge der Einfachheit halber so verlaufen, daß die $\frac{J_c}{J}$ = Fläche durch eine gerade Linie begrenzt ist. J_c sei das im mittleren Drittel gleichbleibende Trägheitsmoment für d = 75 cm.

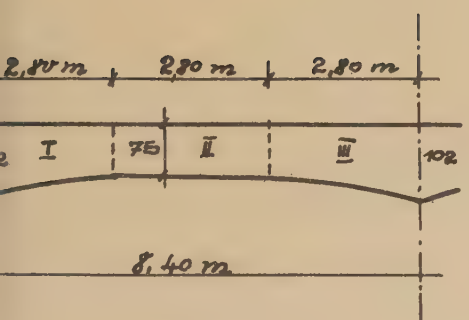


Abb. 58.

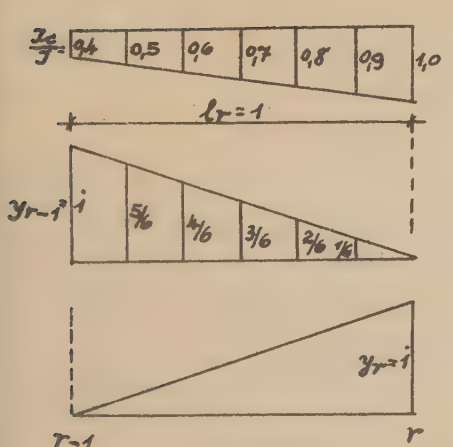


Abb. 59-61.

Die Gleichungen für Teil I und III.

Die $\frac{J_c}{J}$ = Fläche für Teil I ist in Abb. 59 aufgezeichnet, die Grundbelastungsfläche für y_{r-1} in Abb.60. Mit Hilfe numerischer Integration für 6 Teilpunkte unter Berücksichtigung der mit $\frac{J_c}{J}$ reduzierten Momentenflächen erhält man

$$A_o = -1 - 0{,}013.9\,\alpha + 0{,}000.093.5\,\alpha^2 - 0{,}000.000.668\,\alpha^3 + 0{,}000.000.004.83\,\alpha^4 - \ldots.$$

$$A_1' = -1 + 0{,}014.4\,\alpha - 0{,}000.109.5\,\alpha^2 + 0{,}000.000.79\,\alpha^3 - 0{,}000.000.005.68\,\alpha^4 + \ldots.$$

$$A_o'' = -\tfrac{1}{3}\alpha + 0{,}001.42\,\alpha^2 - 0{,}000.010.1\,\alpha^3 + 0{,}000.000.072.5\,\alpha^4 - \ldots.$$

$$A_1'' = \tfrac{1}{6}\alpha - 0{,}001.435\,\alpha^2 + 0{,}000.010.45\,\alpha^3 - 0{,}000.000.075.5\,\alpha^4 + \ldots. ,$$

desgleichen für die Grundbelastungsfläche $y_r=1$ in Abb.61.

$$B_o' = 1 - 0{,}012.8\,\alpha + 0{,}000.096\,\alpha^2 - 0{,}000.000.702\,\alpha^3 + 0{,}000.000.005.05\,\alpha^4 - \ldots.$$

$$B_1' = 1 + 0{,}017.02\,\alpha - 0{,}000.114.2\,\alpha^2 + 0{,}000.000.829\,\alpha^3 - 0{,}000.000.005.95\,\alpha^4 + \ldots.$$

$$B_o'' = -\tfrac{1}{6}\alpha + 0{,}001.43\,\alpha^2 - 0{,}000.010.53\,\alpha^3 + 0{,}000.000.076.1\,\alpha^4 - \ldots.$$

$$B_1'' = \tfrac{1}{3}\alpha - 0{,}001.53\,\alpha^2 + 0{,}000.010.9\,\alpha^3 - 0{,}000.000.079.1\,\alpha^4 + \ldots.$$

Für die Momentendreiecke M_{r-1} und $M_r = 1$
erhält man folgende Funktionswerte:

$$D_o' = \varepsilon\left[0{,}18 - 0{,}000.87\alpha + 0{,}000.006.3\,\alpha^2 - 0{,}000.000.044.5\,\alpha^3 + 0{,}000.000.000.32\,\alpha^4 - \ldots.\right]$$

$$D_1' = \varepsilon\left[-0{,}116.5 + 0{,}000.996\,\alpha - 0{,}000.007.2\,\alpha^2 + 0{,}000.000.052.5\,\alpha^3 - 0{,}000.000.000.377\,\alpha^4 + \ldots.\right]$$

$$D_o'' = \varepsilon\left[-1 - 0{,}013.8\,\alpha + 0{,}000.093\,\alpha^2 - 0{,}000.000.67\,\alpha^3 + 0{,}000.000.004.81\,\alpha^4 - \ldots.\right]$$

$$D_1'' = \varepsilon\left[-1 + 0{,}012.8\,\alpha - 0{,}000.096\,\alpha^2 + 0{,}000.000.698\,\alpha^3 - 0{,}000.000.005\,\alpha^4 + \ldots.\right]$$

$$F_o' = \varepsilon\left[\ 0{,}117 - 0{,}001.54\,\alpha + 0{,}000.010.55\,\alpha^2 - 0{,}000.000.076.5\,\alpha^3 + 0{,}000.000.000.547\,\alpha^4 - \ldots\ \right]$$

$$F_1' = \varepsilon\left[-\ 0{,}282 + 0{,}001.605\,\alpha - 0{,}000.012.2\,\alpha^2 + 0{,}000.000.089.8\,\alpha^3 - 0{,}000.000.000.65\,\alpha^4 + \ldots\ \right]$$

$$F_o''' = \varepsilon\left[\ 1 - 0{,}014.45\,\alpha + 0{,}000.165\,\alpha^2 - 0{,}000.001.14\,\alpha^3 + 0{,}000.000.008.26\,\alpha^4 - \ldots\right]$$

$$F_1''' = \varepsilon\left[\ 1 + 0{,}017.05\,\alpha - 0{,}000.167\,\alpha^2 + 0{,}000.001.18\,\alpha^3 - 0{,}000.000.008.6\,\alpha^4 + \ldots\right]$$

Für $\alpha = \frac{10 \cdot 280^4 \cdot 12}{2 \cdot 10^5 \cdot 75^3} = 8{,}7$ und $\varepsilon = 0{,}000.011.1$ werden:

A_o'	$= -1{,}114$	B_o'	$= 0{,}895$
A_1'	$= -0{,}883$	B_1'	$= 1{,}14$
A_o'''	$= -2{,}8$	B_o'''	$= -1{,}349$
A_1'''	$= 1.348$	B_1'''	$= 2{,}791$
D_o'	$= 0{,}000.001.925$	F_o'	$= 0{,}000.001.16$
D_1'	$= -0{,}000.001.205$	F_1'	$= -0{,}000.002.99$
D_o'''	$= -0{,}000.012.4$	F_o'''	$= 0{,}000.009.85$
D_1'''	$= -0{,}000.009.97$	F_1'''	$= 0{,}000.012.6$

Damit lauten die Gleichungen für Abschnitt I.

$$\frac{dy}{du}(u=0) = -1{,}114\,y_{r-1} + 0{,}895\,y_r + 0{,}000.001.925\,M_{r-1} + 0{,}000.001.16\,M_r$$

$$\frac{dy}{du}(u=1) = -0{,}883\,y_{r-1} + 1.14\,y_r - 0{,}000.001.205\,M_{r-1} - 0{,}000.002.99\,M_r$$

$$\frac{d^3y}{du^3}(u=0) = -2{,}8\,y_{r-1} - 1{,}349\,y_r - 0{,}000.012.4\,M_{r-1} + 0{,}000.009.85\,M_r$$

$$\frac{d^3y}{du^3}(u=1) = 1{,}348\,y_{r-1} + 2{,}791\,y_r - 0{,}000.009.97\,M_{r-1} + 0{,}000.012.6\,M_r$$

Als Spiegelbild hierzu und durch Vertauschung von y_{r-1} mit y_r ergeben sich die Gleichungen

für Abschnitt III.

$$\frac{dy}{du}_{(u=0)} = -1{,}14\, y_{r-1} + 0{,}883\, y_r + 0{,}000.002.99\, M_{r-1} + 0{,}000.001.205\, M_r$$

$$\text{"}\ _{(u-1)} = -0{,}895 y_{r-1} + 1{,}114\, y_r + 0{,}000.001.16\, M_{r-1} - 0{,}000.001.925\, M_r$$

$$\frac{d^3y}{du^3}_{(u=0)} = -2{,}791\, y_{r-1} - 1{,}348\, y_r - 0{,}000.012.6\, M_{r-1} + 0{,}000.009.97\, M_r$$

$$\text{"}\ _{(u=1)} = 1{,}349\, y_{r-1} + 2{,}8\, y_r - 0{,}000.009.85\, M_{r-1} + 0{,}000.012.4\, M_r$$

Die Gleichungen für Teil II.

Mit den Zahlengrößen der Tabelle S.58 nehmen die Funktionen für gleichbleibendes Trägheitsmoment folgende Werte an:

$$B_o' = 1 - 6\left[0{,}003.24\alpha - 0{,}000.035\,\alpha^2 + 0{,}000.000.361\,\alpha^3 - \ldots\ldots\right]$$

$$B_1' = 1 + 2\left[0{,}011.11\alpha - 0{,}000.105.8\,\alpha^2 + 0{,}000.001.082\,\alpha^3 - \ldots\ldots\right]$$

$$F_o' = \varepsilon\cdot 6\left[0{,}027.78 - 0{,}000.342\,\alpha + 0{,}000.003.56\,\alpha^2 - 0{,}000.000.036.5\,\alpha^3 + \ldots\ldots\right]$$

$$F_1' = -\varepsilon\cdot 2\left[0{,}166.7 - 0{,}001.058\,\alpha + 0{,}000.010.69\,\alpha^2 - 0{,}000.000.109.6\,\alpha^3 + \ldots\ldots\right]$$

Mit den Gleichungen S.57 erhält man für die übrigen Funktionswerte

$$B_o' = 0{,}8455 \qquad F_o' = 0{,}151\,\varepsilon = 0{,}168\cdot 10^{-5}$$

$$B_1' = 1{,}178 \qquad F_1' = -0{,}3164\,\varepsilon = -0{,}352\cdot 10^{-5}$$

$$B_o''' = 1{,}312 \qquad F_o''' = -0{,}8455\,\varepsilon = -0{,}941\cdot 10^{-5}$$

$$B_1''' = -2{,}752 \qquad F_1''' = -1{,}178\,\varepsilon = -1{,}31\cdot 10^{-5}$$

$$A_o' = -1{,}178 \qquad D_o' = 0{,}352\cdot 10^{-5}$$

$$A_1' = -0{,}8455 \qquad D_1' = -0{,}168\cdot 10^{-5}$$

$A_o''' = 2{,}752$ $\qquad D_o''' = 1{,}31 \cdot 10^{-5}$

$A_1''' = -1{,}312$ $\qquad D_1''' = 0{,}941 \cdot 10^{-5}$

Mit Rücksicht darauf, daß wir in den Gleichungen für Abschnitt I und III $\frac{d^3y}{du^3}$ dem Vorzeichen der Querkraft entsprechend gebildet haben, sodaß

$EJ_c \frac{d^3y}{dx^3} = Q$ oder $\frac{d^3y}{du^3} = \frac{Q\ell^3}{EJ_c}$ zu setzen ist, haben wir auch für Teil II der Einheitlichkeit halber $\frac{d^3y}{du^3}$ mit dem umgekehrten Vorzeichen zu versehen, sodaß die Gleichungen für Abschnitt II lauten:

$$\frac{dy}{du}_{(u=0)} = -1{,}178\, y_{r-1} + 0{,}8455\, y_r + 0{,}000.003.52\, M_{r-1} + 0{,}000.001.68\, M_r$$

$$\text{"}\quad_{(u=1)} = -0{,}8455\, y_{r-1} + 1{,}178\, y_r - 0{,}000.001.68\, M_{r-1} - 0{,}000.003.52\, M_r$$

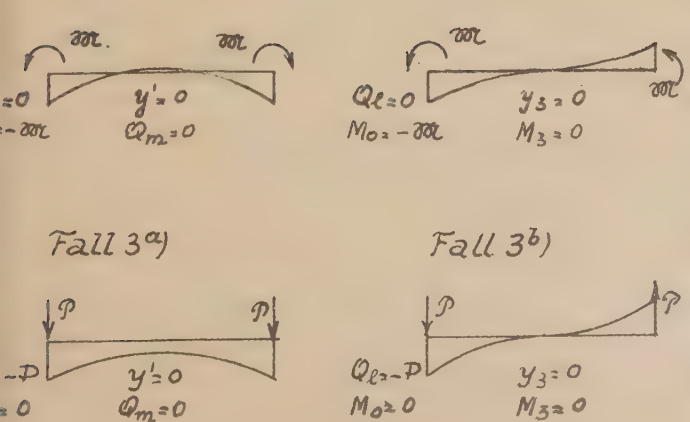
$$\frac{d^3y}{du^3}_{(u=0)} = -2{,}752\, y_{r-1} - 1{,}312\, y_r - 0{,}000.013.1\, M_{r-1} + 0{,}000.009.41\, M_r$$

$$\text{"}\quad_{(u=1)} = 1{,}312\, y_{r-1} + 2{,}752\, y_r - 0{,}000.009.41\, M_{r-1} + 0{,}000.013.1\, M_r$$

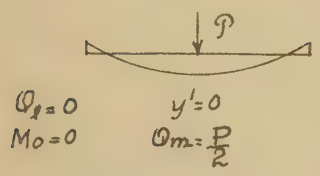
d) Ermittelung der Formänderungen der Platte.

Zur Untersuchung gelangen symmetrische und antimetrische Lastfälle, wie sie in Abb.62-67 angedeutet sind.

Wegen der Verschiedenartigkeit der Grenzbedingungen in Plattenmitte für symmetrische und antimetrische Belastungen werden die Gleichungen für beide Fälle getrennt aufgestellt. Bei Symmetrie sind vier Biegungsordinaten und drei Biegungsmomente unbekannt, daher sind sieben Gleichungen erforder-



Fall 4)



Fall 2)

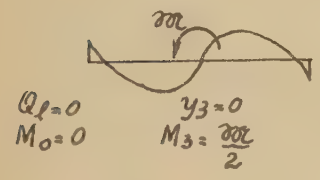


Abb. 62-67.

erforderlich; bei Antimetrie sind Durchbiegung und Biegungsmoment in Plattenmitte bekannt, mithin bleiben fünf Unbekannte, also fünf Gleichungen. Mit der Bezeichnung Q_ℓ für die Querkraft am linken Ende und Q_m für diejenige in Plattenmitte erhält man bei Beachtung der Uebergangsbedingungen, d.h. unter Gleichsetzung der Tangenten und Querkräfte in den Abschnittspunkten, und bei Benennung der Teilpunkte mit 0,1,2 und 3 (Mitte) nachstehende Gleichungen:

I. Symmetrie.

$$-0{,}883y_0+2{,}318y_1-0{,}846y_2-0{,}1205\cdot10^{-5}M_0-0{,}651\cdot10^{-5}M_1-0{,}168\cdot10^{-5}M_2 = 0$$

$$-0{,}846y_1+2{,}318y_2-0{,}883y_3-0{,}168\cdot10^{-5}M_1-0{,}651\cdot10^{-5}M_2-0{,}1205\cdot10^{-5}M_3 = 0$$

$$-1{,}348y_0-5{,}543y_1-1{,}312y_2+0{,}997\cdot10^{-5}M_0-2{,}57\cdot10^{-5}M_1+0{,}941\cdot10^{-5}M_2 = 0$$

$$1{,}312y_1+5{,}543y_2+1{,}348y_3-0{,}941\cdot10^{-5}M_1+2{,}57\cdot10^{-5}M_2-0{,}997\cdot10^{-5}M_3 = 0$$

$$-2{,}8\ y_0-1{,}349y_1-1{,}24\cdot10^{-5}M_0+0{,}985\cdot10^{-5}M_1 = \frac{Q_\ell\cdot\ell^3}{EJ_c}$$

$$1{,}349y_2+2{,}8\ y_3-0{,}985\cdot10^{-5}M_2+1{,}24\cdot10^{-5}M_3 = \frac{Q_m\cdot\ell^3}{EJ_c}$$

$$-0{,}895y_2+1{,}114y_3-0{,}116\cdot10^{-5}M_2-0{,}1925\cdot10^{-5}M_3 = 0$$

II. Antimetrie.

$$-0{,}883y_0+2{,}318y_1-0{,}846y_2-0{,}1205\cdot10^{-5}M_0-0{,}651\cdot10^{-5}M_1-0{,}168\cdot10^{-5}M_2 = 0$$

$$-0{,}846y_1+2{,}318y_2-0{,}168\cdot10^{-5}M_1-0{,}651\cdot10^{-5}M_2-0{,}1205\cdot10^{-5}M_3 = 0$$

$$-1{,}348y_0-5{,}543y_1-1{,}312y_2+0{,}997\cdot10^{-5}M_0-2{,}57\cdot10^{-5}M_1+0{,}941\cdot10^{-5}M_2 = 0$$

$$1{,}312y_1+5{,}543y_2-0{,}941\cdot10^{-5}M_1+2{,}57\cdot10^{-5}M_2-0{,}997\cdot10^{-5}M_3 = 0$$

$$-2{,}8y_0-1{,}349y_1-1{,}24\cdot10^{-5}M_0+0{,}985\cdot10^{-5}M_1 = \frac{Q_\ell\cdot\ell^3}{EJ_c}$$

Durch Elimination der Glieder mit y nehmen die Gleichungen folgende Gestalt an:

Symmetrie:

$$4{,}65\ M_1 + 5{,}37\ M_2 + 9{,}21\ M_3 = 0{,}846\ M_o + 306\ Q_\ell + 1165\ Q_m$$

$$4{,}76\ M_1 - 0{,}1035\ M_2 - 1{,}34\ M_3 = 2{,}086\ M_o + 328\ Q_\ell - 244\ Q_m$$

$$0{,}481\ M_1 - 4{,}14\ M_2 + 4{,}1\ M_3 = -0{,}131\ M_o - 47{,}7 Q_\ell + 607\ Q_m$$

Hierbei sind die Verschiebungen der Knotenpunkte a,b und c durch nachstehende Beziehungen bestimmt:

$$\delta_a = \delta_b = y_o = 10^{-5}(-0{,}396\ M_o + 0{,}183\ M_1 - 0{,}058\ M_2 + 0{,}0705\ M_3 - 94{,}2\ Q_\ell - 12{,}8\ Q_m)$$

$$\delta_c = y_3 = 10^{-5}(\ 0{,}258\ M_2 - 0{,}2105\ M_3 + 69\ Q_m\ )$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\ell}\frac{dy}{du} = 10^{-8}(1{,}935\ M_o + 0{,}81\ M_1 + 0{,}614\ M_2 - 0{,}748\ M_3 + 257{,}5\ Q_\ell + 13{,}6\ Q_m)$$

$$\gamma = 0$$

Antimetrie.

$$6{,}25\ M_1 + 34{,}3\ M_2 = 2{,}71\ M_o + 4{,}74\ M_3 + 990\ Q_\ell$$

$$4{,}02\ M_1 - 7{,}24\ M_2 = 1{,}6\ M_o - 1{,}21\ M_3 + 151\ Q_\ell$$

$$\delta_a = -\delta_b = y_o = 10^{-5}(-0{,}4425\ M_o + 0{,}273\ M_1 + 0{,}598\ M_2 - 0{,}102\ M_3 - 112\ Q_\ell)$$

$$\delta_c = -y_3 = 0$$

$$\alpha = -\beta = 10^{-8}(2{,}45\ M_o - 0{,}155\ M_1 - 6{,}33\ M_2 + 1{,}08\ M_3 + 445\ Q_\ell)$$

$$\gamma = 10^{-8}(-0{,}421\ M_1 + 0{,}1285\ M_2 - 1{,}1\ M_3)$$

Für die Belastungen durch $p = 1/100$ und $P = 1/100$ ergeben sich hiernach die Momente auf 1 cm Breite der Platte:

Fall 1^a)	Fall 1^b)
$M_1 = -0{,}409 \cdot 10^{-2}$	$M_1 = -0{,}406 \cdot 10^{-2}$
$M_2 = 0{,}0216$ "	$M_2 = -0{,}00491$ "
$M_3 = 0{,}102$ "	$M_3 = 0$

Fall 2)

$M_1 = -0{,}01935 \cdot 10^{-2}$

$M_2 = 0{,}0727$ "

$M_3 = 0{,}5$

Fall 4)

$M_1 = -0{,}0591$

$M_2 = -0{,}0523$

$M_3 = 0{,}692$

Mit diesen Werten erhält man für die Verschiebungen der Knotenpunkte die nachfolgend aufgeführten, mit $E \cdot J_R = 0{,}1217 \cdot 10^{13}$ erweiterten Werte:

$E \cdot J_R$ fache Knotenpunktverschiebungen.

	1a)	1b)	2)	3a)	3b)	4)
δ_a / δ_b	39900	+ / − 39900	− / + 1555	10100000	+ / − 10100000	− 286000
δ_c	-1950	0	0	− 572000	0	2255000
α / β	− 286	− / + 286	+ / − 10,2	− 39900	− / + 39900	975
γ	0	20,4	− 64,8	0	3110	0

Die Biegungsmomente für die Gesamtbreite der Platte = 100 cm in den Punkten $0{,}18\,\ell$ von den Enden der Platte ab gerechnet für die spezifischen Belastungen sind näherungsweise interpoliert und nebst den Momenten für die Plattenmitte in der folgenden Tafel angegeben:

Momente der Platte.

Punkt	1) i	2) i	3) i	4) i
0,18 ℓ von links	-0,37	-0,02	-63,5	-6,0
Mitte	+0,051	$\pm$ 0,5	+ 3,78	+69,2
0,18 ℓ von rechts	-0,0015	+0,02	+ 0,28	-6,0

e) Zahlenrechnung für den Rahmen mit veränderlicher Sohlenstärke.

Da der Berechnungsvorgang derselbe wie bei gleichbleibender Sohlenstärke ist, werden mit den früheren Bezeichnungen nur die Hauptresultate angegeben, die wieder wie bisher mit Hilfe des Rechenschiebers erhalten wurden.

Am einfachen Rahmen sind

f = 335 cm

X_p(halb) = 154 p $\qquad$ $X_{pR} = -264\ p_R$

$Y_p = 22\ p$ $\qquad$ $Y_{pR} = 0$

$Z_p = -71\,000\ p$ $\qquad$ $Z_{pR} = 77\,350\ p_R$

$X_{pD} = -174\ p_D$ $\qquad$ $X_{P\ell} = -0{,}0965\ P_\ell$

$Y_{pD} = 0$ $\qquad$ $Y_{P\ell} = -0{,}0168\ P_\ell$

$Z_{pD} = 52\,500\ p_D$ $\qquad$ $Z_{P\ell} = -12{,}26\ P_\ell$

$X_{Pm} = 0{,}00473\ P_m$

$Y_{Pm} = 0$

$Z_{Pm} = 0{,}6\ P_m$

und damit für den Doppelrahmen bei

1) gleichm. vert. Last p über der rechten Riegelhälfte.

$U_a = 46{,}2\ p \qquad A = -42\ p \qquad M_u^{\ell} = -1725\ p$

$U_b = 477\ p \qquad C = 477\ p \qquad M_u^{m} = 1320\ p$

$U_c = -11250\ p; \quad B = 405\ p \qquad M_u^{r} = -23260\ p$

$M_o^{r} = -35\,940\ p$ (oberer Eckpunkt rechts)

$M_F = 45\,540\ p$ (Mitte Belastungsfeld)

$M_o^{m} = -49\,310\ p$ (rechts v. Mittelstiel)

2) Erddruck

α) gleichm. vert. Last p_R

$U_a = U_c = 0\ ; \quad A = B = 21{,}5\ p_R; \quad M_o^{r} = -11\,460\ p_R\ ;$

$U_b = -42{,}95\ p_R; \quad C = -42{,}95\ p_R\ ; \quad M_F = -2435\ p_R\ ;$

$M_u^{\ell} = M_u^{r} = -11\,620\ p_R\ ; \qquad M_o^{m} = +6600\ p_R\ ;$

β) Dreiecklast p_D

$U_b = -22{,}6\ p_D \qquad A = 11{,}3\ p_D \qquad M_u^{\ell} = -6080\ p_D$

$C = -22{,}6\ p_D$

3) $P_{\ell,r}$ (links und rechts)

$U_b = 0{,}212\ P_{\ell,r}; \quad A = 0{,}89\ P_{\ell,r}\ ; \quad M_u^{\ell} = -8607\ P_{\ell,r}\ ;$

$C = 0{,}212\ P_{\ell,r}\ ;$

4) P_m am mittleren Knotenpunkt.

$U_b = -0{,}0562\ P_m\ ; \quad A = 0{,}0281\ P_m\ ; \quad M_u^{\ell} = 1{,}37\ P_m\ ;$

$C = 0{,}944\ P_m\ .$

Mit Hilfe der Tafel für die " Momente an der Platte ergibt sich folgende Zusammenstellung für die

Größtmomente der Sohle:

Maximale Biegungsmomente an der Fundamentplatte mit veränderlichem Trägheitsmoment.

	Knotenmomente				Feldmomente	
infolge (p in kg/cm	M^{ℓ}	M^{r}	M_m^{ℓ}	M_m^{r}	M_{ℓ}	M_r
p rechts	1725 p	23 260 p	33770 p	32 450 p	170 p	- 19800 p
p voll	24 980 p		66 210 p		-19 600 p	
p_R	11 620 p_R		-3980 p_R		3 235 p_R	
p_D	6080 p_D		-2095 p_D		1680 p_D	
$P_{\ell,r}$	86,07 P_{ℓ}		12,60 P_{ℓ}		-25,92 P_{ℓ}	
P_m	1,37 P_m		65,55 P_m		- 7,96 P_m	

Für die Gesamtbelastung einschl. Eigengewicht erhält man, wenn wieder alle Größen auf p = $10^t/m$ obere Riegelbelastung bezogen werden:

Größtmomente der Sohle infolge Vollbelastung.

	Knotenmomente		Feldmomente
infolge	$M^{\ell,r}$	$M_m^{\ell r}$	$M_{\ell,r}$
p voll	24 980 p	66 210 p	- 19 600 p
p_R	3900 p	- 1330 p	1080 p
p_D	1540 p	- 560 p	450 p
g = 0,215 p	5360 p	14250 p	-4200 p
$P_{\ell,r}$ = 107,5 p	9260 p	1350 p	-2800 p
P_m = 90 p	125 p	5900 p	-720 p
Größtmomente	44 920 p	85 800 p	- 25 800 p

Aus dem Vergleich vorstehender Ergebnisse mit denjenigen des Rahmens mit unveränderlicher Fundamentplatte ergibt sich folgendes:

Sowohl für senkrechte wie auch für wagerechte Belastung erfährt die Beanspruchung des oberhalb der Fundamentplatte befindlichen Rahmenteiles, von den Fußmomenten abgesehen, infolge der Fundamentverstärkung nur unwesentliche Veränderung. Ganz anders verhält sich die Beanspruchung der Platte selbst. Hier haben sich die Größtmomente durchweg absolut erhöht. Für volle Riegelbelastung hat sich das Biegungsmoment der Platte unter dem Mittelstiel hauptsächlich gesteigert, und zwar um 20 %, an der gleichen Stelle wirkt das Eigengewicht des Mittelstieles um 21 % stärker. Ganz erheblich verändert hat sich die Plattenbeanspruchung bei der Belastung des Rahmens durch die seitlich angreifenden Kräfte. Hier ist bei den vorher unterschiedlichen Momenten des oberen und unteren Riegels ein günstiger Ausgleich eingetreten durch geringe Abnahme des oberen Eckmomentes und durch verstärkte Zunahme des unteren Eckmomentes und des Momentes der Platte am Mittelstiel. Die Zunahme der beiden Momente erreicht im Mittel das Maß von 35 %. Das (negative) Feldmoment hat für alle Belastungen absolut abgenommen, und zwar, abgesehen von der wagerechten Belastung, wo es als Zwischenmoment nur nebengeordnete Bedeutung hat, um durchschnittlich 10 %. Bei dem oben angenommenen Zahlenverhältnis der Belastungen ist für Vollbelastung für die Anläufe der Platte eine Erhöhung des

unteren Eckmomentes um 6 % und des Momentes am mittleren Knotenpunkt um 19 % verblieben, dagegen ist das Moment in den Feldern der Platte um 10 % geringer geworden. Man folgert ohne weiteres, daß bei größerem Verhältnis $\frac{h}{\ell}$ auch die Eckmomente durch den vermehrten Einfluß der seitlichen Belastungen eine dem mittleren Moment entsprechendere Steigerung erfahren würden.

Der bei Beginn der Rechnung zunächst etwas völlig gewählte Anlauf der Platte bis zur Stärke von d = 102 cm ist durch die nunmehr in Plattenmitte erforderliche nutzbare Höhe $h_m = 10{,}9\sqrt{85{,}8} = 101$ cm mit $d_m = 106$ cm noch überschritten worden. Dafür hat sich die erforderliche Stärke der Platte in den Feldern auf $h = 13\sqrt{25{,}8} = 66$ cm mit d = 71 cm ermäßigt. Eine nochmalige Durchrechnung des Systems bis zur Uebereinstimmung der Ergebnisse mit den angenommenen Fundamentmaßen würde einen noch größeren Unterschied zwischen den erforderlichen Plattenstärken hervorrufen.

Es liegt nahe, den Grund für die erhebliche Zunahme der Biegungsmomente der Fundamentplatte in ihren verstärkten Teilen durch folgende Betrachtung zu erkennen. Sieht man für irgend eine Belastung des Rahmens mit unveränderlicher Fundamentplatte , beispielsweise für volle Belastung des oberen Riegels (Abb. 68), die auftretenden Bodenpressungen als äußere Belastung des Bodenriegels an und rechnet für die gleiche Belastung den geschlossenen Rahmen unter Berücksichtigung des Anlaufes der Platte durch, so erhält man die bei gewöhn-

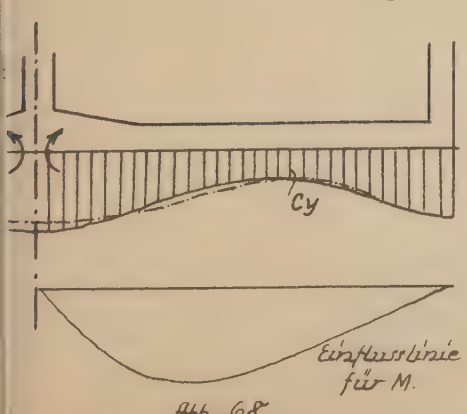


Abb. 68.

lichen Systemen bekannte vermehrte Biegungsbeanspruchung im verstärkten Plattenteil. Die hierdurch veränderte Angriffslastenverteilung an der Platte ruft eine Umgruppierung der Bodenpressungen in der strichpunktierten Linie herbei, also nach dem Ort der größten Ordinaten der Momenten - einflußlinie. Die Folge ist eine nochmalige Erhöhung des Momentes und hierdurch eine erneute Lastverteilung us.f., bis die Ausgleichung erreicht ist. Daraus geht die besondere Empfindlichkeit der Fundamentplatte gegen wechselndes Trägheitsmoment hervor. Es ist damit bewiesen, daß zur einwandsfreien statischen Erfassung durchgehend gestützter geschlossener Rechteckrahmen die Berücksichtigung veränderlichen Querschnitts der Fundamentplatte unerläßlich ist.

D. Praktische Bedeutung der Ergebnisse.

Die Berechnung des vorgelegten Zahlenbeispiels hat trotz hoher Riegelbelastung zu annehmbaren Querschnittsverhältnissen geführt. Die Möglichkeit einer praktischen Anwendung dieses Beispiels ist allein damit nicht gegeben, da die Gültigkeit der Annahme der Verhältnisgleichheit zwischen Einsenkung und Bodendruck nach dem Stande der bisher erfolgten Bodenuntersuchungen, wie eingangs erwähnt, an kleine Bodendruckwerte (bis 1-1,5 kg/cm^2) gebunden ist.Das behandelte Zahlenbeispiel ergibt für gleichbleibende Sohlenstärke bei Vollbelastung einschließlich des Eigengewichtes der Fundamentplatte für die durchschnittliche Bodenpressung $p = 1{,}76$ kg/cm^2. Die größte Pressung tritt unter den Außenstielen auf und beträgt $p_{max} = 3{,}15$ kg/cm^2,unter dem Mittelstiel ist sie $p = 2{,}7$ kg/cm^2. Mit Rücksicht hierauf wäre also die Riegelbelastung herabzusetzen. Die dadurch mögliche Querschnittsverringerung ergibt, wie durchgerechnete, hier nicht angeführte Beispiele gezeigt haben, eine vermehrte Verkrümmung der Bodenpressungslinie und damit einen stärkeren Gegensatz zwischen größtem und kleinstem Bodendruck. Zum Ausgleich dieses Gegensatzes wird die Verstärkung der Fundamentplatte gegen die Knotenpunkte vor allem beitragen.

Man ist erst in letzter Zeit dazu übergegangen, zum Bau von Tieftunneln kontinuierlich geschlossene Rahmen zu wählen, nachdem man sich bis dahin aufgeteilter Konstruktionen, hauptsächlich des Halbrahmens

mit biegungslos verbundener Decke bedient hat. Als Grund für die Anwendung geschlossener Rahmen waren die Vorteile maßgebend, die durch die kontinuierliche Formgebungsmöglichkeit des Eisenbetons gegeben sind und die auch, wie die vorliegende Untersuchung gezeigt hat, durch die Winklersche Annahme in der Querschnittsbemessung gewahrt bleiben. Bei der großen Ausdehnung solcher Tunnelbauwerke ist eine strenge Erfassung des Materials geboten. Es ist daher auch für die praktische Ausführung dieser Bauwerke notwendig, die veränderlichen Querschnittsverhältnisse bei der Fundamentplatte zu berücksichtigen.

L e b e n s l a u f

Am 16. Juli 1897 wurde ich, Max Straub , Sohn des Dipl. Handelslehrers a.D. Peter Straub , in Köln a/Rh. geboren. Nach siebenjährigem Besuch des Schillergymnasiums zu Köln-Ehrenfeld trat ich 1914 als Kriegsfreiwilliger in das Heer ein, bestand im Dezember 1915 die Reifeprüfung und wurde im November 1918 aus dem Heeresdienst entlassen. Nach überstandener Krankheit begann ich im Herbst 1919 das Studium an der Technischen Hochschule Darmstadt, wo ich im Herbst 1923 die Diplomprüfung ablegte. Hierauf trat ich in das Ingenieurbüro Dr. Ing. Pirlet,Köln ein, das ich im Oktober 1926 verließ, um in der Folge als Assistent am Lehrstuhl für Baukonstruktionslehre der Technischen Hochschule Breslau tätig zu sein.